DR. PAUL ZÜHLKE

AUSFÜHRUNG ELEMENTARGEOMETRISCHER KONSTRUKTIONEN

BEI UNGÜNSTIGEN LAGEVERHÄLTNISSEN

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN · 1906

AUSFÜHRUNG ELEMENTARGEOMETRISCHER KONSTRUKTIONEN BEI UNGÜNSTIGEN LAGEVERHÄLTNISSEN

VON

Dr. PAUL ZÜHLKE
OBERLEHRER AN DER OBERREALSCHULE ZU CHARLOTTENBURG

MIT 55 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

Vorwort.

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis causa, sed utilitas officiumque fuit.
Ovid.

Die Planimetrie der Alten, die ihren klassischen Ausdruck in Euklids Elementen gefunden hat, beschäftigt sich nur mit Idealgebilden, sie operiert in einer unbegrenzten Ebene mit gedachten Geraden und Kreisen, deren Schnittpunkte (wenn sie nur überhaupt im Endlichen liegen) als ganz gleichmäßig genau bestimmt erscheinen. Auf den Fall, daß der Schnittpunkt zweier Geraden oder Kreise außerhalb des Zeichenblattes, also außerhalb eines begrenzten Teils der Ebene liegt, ist von den Alten keine Rücksicht genommen worden; die ihnen geläufige Tatsache, daß die wirklich gezeichneten Geraden und Kreise die Forderungen, die man an die gedachten Gebilde stellen muß, nur in mehr oder weniger roher Weise erfüllen, hat sie nicht veranlaßt, Fälle, in denen dieser Mangel sich besonders deutlich fühlbar macht — wie etwa den sehr spitzen Schnitt zweier Geraden — genauer zu untersuchen. Erst in neuerer Zeit, besonders seitdem die Technik und das dazu notwendige praktische Zeichnen (namentlich in der darstellenden Geometrie) sich einer liebevolleren Pflege zu erfreuen hatten, ist man — vorzugsweise durch praktische Fälle gezwungen — dazu übergegangen, die Lage von Schnittpunkten oder die Genauigkeit, mit der sie bestimmt sind, mehr zu beachten; ich darf erinnern an die schöne, wohl zuerst von Lambert behandelte Aufgabe, die Verbindungslinie eines gegebenen Punktes und des unzugänglichen Schnittpunktes zweier Geraden nur mit Hilfe des Lineals zu finden.

Abgesehen von dieser Aufgabe und der zu ihr dualen, die beide in geometrischen Schulbüchern oft behandelt oder wenigstens gestellt werden, findet man in der Literatur nur wenige Bemerkungen über die Art und Weise, wie die häufiger gebrauchten Elementarkonstruktionen zu umgehen oder zu ersetzen sind, wenn ihre „normale" Ausführung durch ungünstige Lageverhältnisse erschwert oder unmöglich

gemacht wird; am häufigsten noch finden sich solche Notizen zerstreut in einigen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, so z. B. bei der Aufgabe, die Schnittgerade zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen zu konstruieren, wenn die Spurenschnittpunkte unzugänglich sind. Solche Aufgaben, die irgend einem Spezialgebiet, wie etwa der darstellenden Geometrie entstammen, konnten hier keine Berücksichtigung finden, da andernfalls die für den Umfang der Arbeit vorgeschriebenen Grenzen erheblich hätten überschritten werden müssen; dagegen ist alles, was mir über rein planimetrische Aufgaben der angedeuteten Art aus der Literatur bekannt geworden und zugänglich gewesen ist, benutzt und am Schlusse der Arbeit im einzelnen zitiert.

Schließlich sei mir noch ein Wort über die Beziehungen der hier behandelten Aufgaben zum mathematischen Schulunterricht gestattet. Es ist vielleicht nicht unwichtig, wenn in der Schule einmal darauf hingewiesen wird, welche Rolle günstige oder ungünstige Lageverhältnisse beim praktischen Zeichnen spielen; es ist wohl recht nützlich, wenn die Schüler auch in der Mathematik lernen, sich aus einer anscheinend oder wirklich schwierigen Situation mit anderen als den sonst gewohnten Hilfsmitteln herauszuhelfen. Natürlich wird ja niemand diese, ich möchte fast sagen, pathologische Geometrie des Ungünstigen etwa im Zusammenhange durchnehmen; wenn vielmehr gelegentlich einmal die eine oder andere der hier mitgeteilten Aufgaben in der Schule gestellt werden sollte, um in die sonst im Unterricht besprochenen Konstruktionsaufgaben einige Abwechslung zu bringen, so hätte die vorliegende Arbeit ihren Zweck erfüllt.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.

Bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben hat man zu unterscheiden, ob die dazu erforderlichen Hilfskonstruktionen nur theoretisch, d. h. (mit Steiner[1]) zu reden) „bloß mittels der Zunge“ oder auch wirklich auf dem Zeichenbrett mit Lineal, Zirkel und Schiebdreiecken ausgeführt werden sollen. Was theoretisch kurz und einfach ist, braucht praktisch noch nicht empfehlenswert zu sein; z. B. sind die sogenannten geometrographischen Konstruktionen für die wirkliche, praktische Ausführung trotz der Kleinheit des „Einfachheitskoeffizienten“ nicht immer genau genug, was von den Geometrographen auch zugestanden wird[2]). Die Genauigkeit einer Zeichnung ist nämlich außer von der Anzahl der zu ihrer Herstellung notwendigen Elementarkonstruktionen, deren jede mit einem kleinen Fehler behaftet ist, noch wesentlich abhängig von der mehr oder weniger günstigen, gegenseitigen Lage der in der Figur benutzten Punkte und Geraden.

Es ist zunächst festzustellen, wann die Lageverhältnisse einer Figur als ungünstig bezeichnet werden sollen: einmal dann, wenn Punkte, die zur Konstruktion gebraucht werden, unzugänglich sind, d. h. außerhalb des zur Verfügung stehenden Zeichenblattes liegen; solche Fälle werden weiter unten in einer größeren Anzahl von Aufgaben einzeln behandelt werden. Es bleiben dann noch die Fälle, in denen einerseits die Schnittpunkte von Geraden (oder Kreisen), andererseits die Verbindungslinien von Punkten zwar erreichbar sind, aber nicht sicher genug bestimmt erscheinen.

Solche Fälle bespricht Chr. Wiener anhangsweise in seinem Lehrbuch der darstellenden Geometrie.[3]) Er bemerkt zunächst, daß die Aufgabe des genauesten Konstruierens „in der Weise der Aufgaben der höheren Geodäsie mittels der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden müßte“ und fährt dann fort: „Einer solchen Behandlung sind aber die Aufgaben des Konstruierens noch nicht unterzogen worden[4]), und ich will mich daher mit der Anführung einiger

mehr oder weniger sicheren Sätze begnügen, welche auf Erfahrung, Anschauung und Abschätzung gegründet sind.

1) Eine Gerade ist in ihrem ganzen Verlaufe um so sicherer bestimmt, je weiter die zwei Punkte voneinander entfernt liegen, welche sie bestimmen.

2) Der Schnittpunkt zweier Geraden ist um so sicherer bestimmt, je näher diejenigen Punkte, welche jede Gerade bestimmen, bei dem Schnittpunkte liegen (wegen der Krümmung der Lineale).

3) Ein als Schnitt zweier Linien bestimmter Punkt dient um so sicherer zur Bestimmung beliebiger Geraden, je mehr sich der Winkel, unter dem sich jene Linien schneiden, einem Rechten nähert.

4) Der Schnittpunkt zweier sich spitzwinklig schneidenden Geraden dient dennoch sicher zur Bestimmung einer dritten Geraden, wenn diese einen kleinen Winkel mit einer der beiden ersteren Geraden bildet, wenn sie z. B. im Inneren des von diesen gebildeten spitzen Winkels, nicht aber, wenn sie nahe bei der Halbierungslinie des stumpfen Winkels liegt.

5) Ein Kreis und ein mittels eines Längenabstandes bestimmter Punkt werden bei Benutzung eines gewöhnlichen Zirkels (im Gegensatz zum Stangenzirkel) unsicher, wenn die Zirkelöffnung größer als der Schenkel des Zirkels ist (wegen des Federns der Schenkel)."

Von den vorstehenden Wienerschen Sätzen sollen Nr. 2 und 5, die ersichtlich nur auf Mängel der Zeicheninstrumente Bezug nehmen, im folgenden unberücksichtigt bleiben, dagegen werden wir uns gelegentlich auf Nr. 1, 3 und 4, in denen die Lageverhältnisse der geometrischen Gebilde eine Rolle spielen, berufen können.

Wir wenden uns nunmehr zum Hauptteil unserer Arbeit, der Lösung von Aufgaben, wobei aber gleich von vornherein bemerkt werden muß, daß weder bei der Auswahl der Aufgaben, noch bei der Art ihrer Lösung auf Vollständigkeit Gewicht gelegt wurde; z. B. ist es bei Aufg. 6 absichtlich dem Scharfsinn der Leser (ich denke hierbei besonders an die Studierenden und Schüler, welche die vorliegende Arbeit zur Hand nehmen) überlassen worden, den Fall, daß die Geraden b, c einen ziemlich kleinen Winkel einschließen, selbst zu erledigen. Die Arbeit will nicht ein Rezeptbuch zur Lösung von Aufgaben für alle erdenklichen Fälle ungünstiger Lagen sein, sondern nur durch Besprechung der häufiger vorkommenden Typen zur Selbstbetätigung anregen.

Ausführung von Konstruktionen.

I. Unzugängliche Punkte.

1. Aufgaben über Schnittpunkte von Geraden.

Vorbemerkung. Bei allen Konstruktionen gilt als stillschweigend festgesetzt, daß das Ziehen von Parallelen und das Errichten und Fällen von Loten in der beim praktischen Zeichnen üblichen Weise — also nicht mit Zirkel und Lineal, sondern mit rechtwinkligen Schiebdreiecken — ausgeführt werde.

1. Einen gegebenen Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt S zweier gegebenen Geraden l_1, l_2 geradlinig zu verbinden.

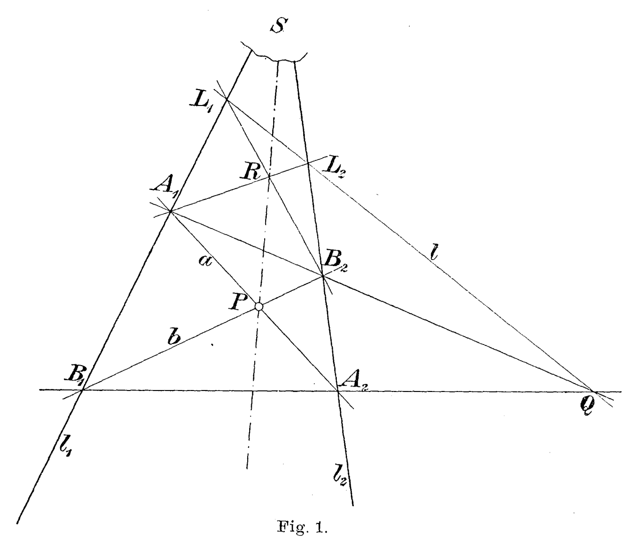


Fig. 1.

a) (*Lösung nur mit dem Lineal*). Man lege (Fig. 1) durch P zwei beliebige Gerade a, b, die l_1, l_2 in A_1, A_2, B_1, B_2 schneiden,

ziehe und verlängere die Verbindungslinien $A_1 B_2$ und $B_1 A_2$, bis sie sich in Q schneiden, und lege durch Q eine beliebige Gerade l, die l_1, l_2 in L_1, L_2 schneidet. Der Schnittpunkt R der Verbindungslinien $A_1 L_2$ und $L_1 B_2$ ist ein zweiter Punkt des gesuchten Strahles PS. Der *Beweis* folgt aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks; die Punktepaare P, Q und R, Q werden durch l_1, l_2 harmonisch getrennt.[5]) — *Anmerkung.* Die Konstruktion wird im allgemeinen unbrauchbar, wenn P nahe an der Halbierungslinie des von l_1, l_2 eingeschlossenen Winkels liegt. Warum? — Der Schüler führe, möglichst ohne die soeben benutzte Figur anzusehen, dieselbe Konstruktion aus für den Fall, daß P außerhalb des spitzen Winkels (l_1, l_2) liegt.

b) Man ziehe (Fig. 2) durch P eine beliebige, von l_1, l_2 begrenzte Gerade $X_1 X_2$ und dazu eine beliebige Parallele $Q_1 Q_2$, trage die Strecke $Q_1 Q_2$ auf $X_1 Q_1$ ab bis U, ziehe zu $X_2 U$ durch P die Parallele PV und mache endlich $Q_1 Q = X_1 V$, so ist PQ die gesuchte Gerade.[6]) (*Beweis* mit Hilfe der Proportionallehrsätze.)

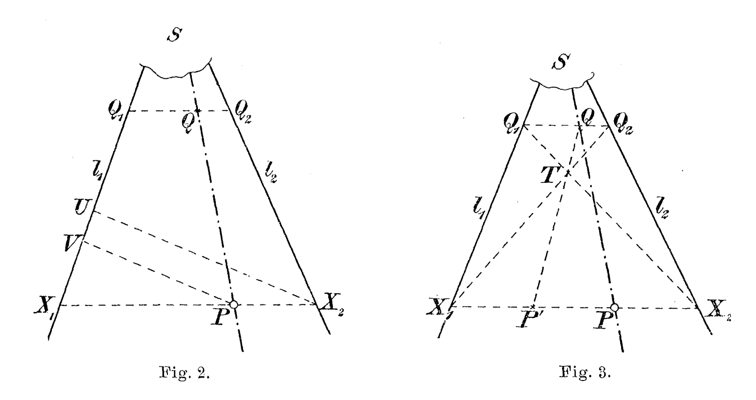


Fig. 2. Fig. 3.

c) Den in der vorigen Konstruktion benutzten Punkt Q kann man auch folgendermaßen erhalten. Man bringe (Fig. 3) $X_2 Q_1$ und $X_1 Q_2$ zum Schnitt in T, trage PX_1 nach $X_2 P'$ und ziehe $P'T$. — *Frage:* Warum wird man — bei den in Fig. 3 herrschenden Lageverhältnissen — nicht $X_1 P' = PX_2$ machen, was theoretisch doch dasselbe wäre wie $PX_1 = X_2 P'$?

d) Man ziehe (Fig. 4) von P aus bis l_1, l_2 zwei beliebige Gerade PN_1, PN_2 und zur Verbindungslinie von N_1, N_2 eine beliebige Parallele, die l_1, l_2 in E_1, E_2 schneidet. Zieht man noch durch E_1 zu PN_1 und durch E_2 zu PN_2 je eine Parallele, so schneiden sich

diese in einem Punkte R des Strahles PS.[7]) (*Beweis:* S ist der äußere Ähnlichkeitspunkt der perspektivisch gelegenen Dreiecke PN_1N_2, RE_1E_2).

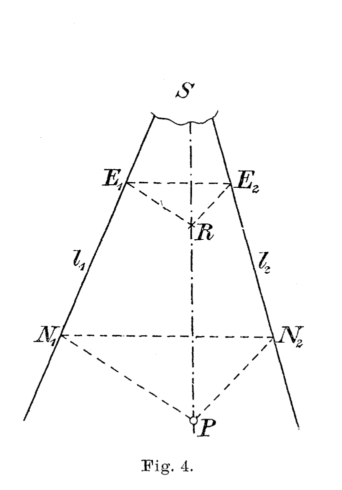


Fig. 4.

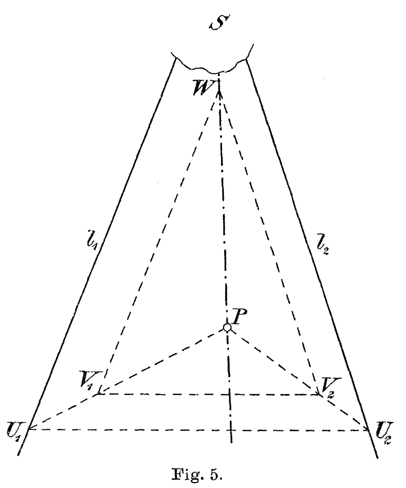


Fig. 5.

e) Auf l_1, l_2 (Fig. 5) wähle man je einen Punkt U_1, U_2 beliebig, ziehe in dem Dreieck U_1PU_2 zu der Seite U_1U_2 eine beliebige Parallele V_1V_2 und durch V_1 zu l_1, durch V_2 zu l_2 je eine parallele Gerade. Der Schnittpunkt W dieser beiden Geraden liegt auf der gesuchten Verbindungslinie PS.[8]) (P ist der innere Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke SU_1U_2, WV_1V_2.) Was ist über die praktische Verwendbarkeit dieser Konstruktion zu sagen? Man beachte die oben (S. 8) genannten Wienerschen Sätze 1, 3 und 4.

f) Man fälle (Fig. 6) von P auf l_1, l_2 die Lote PF_1, PG_2; der Schnitt von PF_1 mit l_2 sei F_2, der von PG_2 mit l_1 sei G_1. Fällt man von P auf die Verbindungslinie von G_1, F_2 das Lot, so geht dieses durch S.[9]) (*Beweis:* F_1F_2, G_1G_2 sind Höhen des Dreiecks SG_1F_2.)

Fig. 6.

g) Man lege (Fig. 7) durch P die Gerade X_1X_2 beliebig, trage PX_2 auf PX_1 ab bis T, ziehe durch T zu l_2 die Parallele TP_1 und zu P_1P eine beliebige Parallele Q_1Q_2; die Mitte Q von Q_1Q_2 liegt auf der gesuchten Geraden PS.[10]) (*Beweis:* Verlängert man P_1P

bis P_2, so folgt aus $PT = PX_2$ und $P_1 T \parallel X_2 P_2$, daß $PP_1 = PP_2$ ist. PQS ist also Schwerpunktstransversale der perspektivisch gelegenen Dreiecke SP_1P_2, SQ_1Q_2). Man vergleiche die Konstruktionen f) und g) hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit bei verschiedenen Lagen des Punktes P, insbesondere wenn P nahe an einer der gegebenen Geraden l_1, l_2 oder aber nahe an der Halbierungslinie des Winkels (l_1, l_2) liegt. Ist die Konstruktion g) brauchbar, wenn P außerhalb des spitzen Winkels (l_1, l_2) liegt?

h) Wenn P günstig liegt (vgl. die vorstehenden Anmerkungen) und viel Platz vorhanden ist, kann man durch P_2 zu l_1 (vgl. Fig. 7)

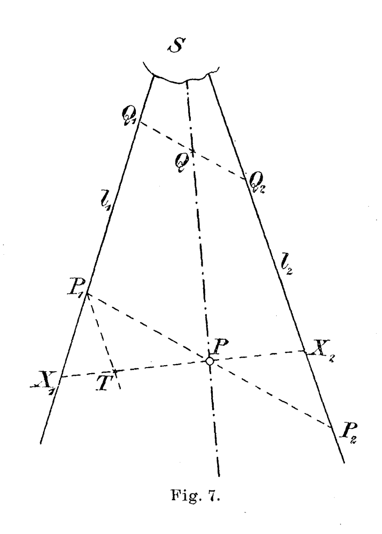


Fig. 7.

die Parallele ziehen, welche auf der Verlängerung von $P_1 T$ einen Punkt der gesuchten Geraden SP bestimmt.[11]) (Satz über die Diagonalen eines Parallelogramms.)

i) Eine „geometrographische“ Lösung der Aufgabe ist von d'Ocagne[12]) angegeben worden. Die Konstruktion beruht auf der Anwendung des Pascalschen Satzes und ist demgemäß *mit alleiniger Benutzung des Lineals* ausführbar. — Man ziehe (Fig. 8) zwei beliebige Geraden a, b, welche l_1, l_2 in A_1, A_2, B_1, B_2 schneiden. Den gegebenen Punkt P verbinde man mit B_1 und A_2; der Schnitt von PB_1 und a sei A, der von PA_2 und b sei B. Zieht man noch die Geraden A_1B und AB_2, so bestimmen diese einen Punkt R der gesuchten Verbindungslinie PS. — *Beweis:* Das Geradenpaar a, b kann als entarteter Kegelschnitt aufgefaßt werden, welchem das (über-

schlagene) Sechseck $B_1 A B_2 A_2 B A_1$ eingeschrieben ist. Die drei Paare gegenüberliegender Seiten sind 1) $B_1 A$, $A_2 B$, 2) $A B_2$, $B A_1$, 3) $B_2 A_2$, $B_1 A_1$. Ihre Schnittpunkte P, R, S liegen also auf einer Geraden.

Man könnte natürlich noch zahlreiche andere Lösungen der gestellten Aufgabe finden, so z. B. durch Spezialisierung der Sätze von

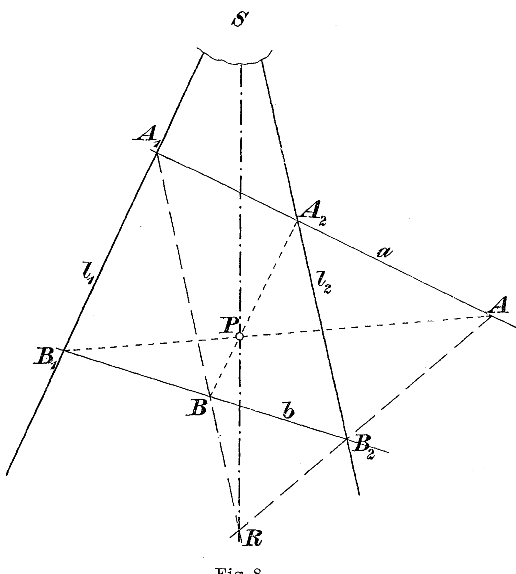


Fig. 8.

Desargues, Pascal und Brianchon.[13]) Die hier in aller Breite angegebenen Konstruktionen sollen hauptsächlich dem Schüler zeigen, wie verschiedenartig man eine solche Aufgabe angreifen kann; vor allem aber soll sich der Zeichner Rechenschaft geben über die Brauchbarkeit und Genauigkeit der verschiedenen Konstruktionen.

2. Es sind zwei Punkte A, B und eine Gerade g gegeben. Den Punkt, in welchem g die Gerade AB schneidet, zu ermitteln, ohne A und B zu verbinden.

(Die Aufgabe hat für das praktische *Zeichnen*[14]) keine Bedeutung; wenn sie gleichwohl hier erwähnt wird, so geschieht dies, weil es für den Schüler lehrreich sein dürfte, die duale Beziehung dieser Aufgabe zu der vorigen (Lösung a) während des Zeichnens zu verfolgen.)

Linealkonstruktion. Man wähle (Fig. 9) A, B als ein Paar, zwei Punkte M, N auf g als ein anderes Paar Gegenecken eines vollständigen

Vierseits. Auf der dritten Diagonale CD wähle man einen Punkt Q beliebig. Der Schnitt von BM und AQ sei U, der von AN und BQ sei V. Die Verbindungslinie UV schneidet g in dem gesuchten

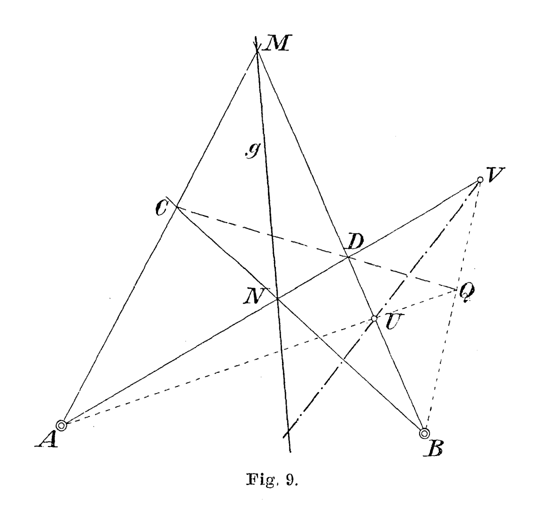


Fig. 9.

Punkte. Der *Beweis* folgt aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits. Wie wird man die Punkte M, N, Q praktisch wählen?

3. Die unzugänglichen Schnittpunkte G, L zweier Geradenpaare g_1, g_2, l_1, l_2 geradlinig zu verbinden.

Die Aufgabe soll hier nur unter der Annahme gelöst werden, daß wenigstens eine der durch g_1, g_2, l_1, l_2 bestimmten Diagonalen (z. B. BD in Fig. 10) gezeichnet werden kann.

1. Fall. Die zweite Diagonale (AC) ist auch benutzbar. (*Lösung nur mit dem Lineal.*) Der Schnittpunkt von AC und BD sei E. Man bestimme[15]) zu B, E, D den vierten harmonischen, zu E zugeordneten Punkt F und verbinde diesen (nach Aufg. 1a) mit G oder L. Die erhaltene Gerade ist die dritte Diagonale des vollständigen Vierseits $g_1 g_2 l_1 l_2$. — Die Konstruktion ist praktisch nur selten brauchbar.

2. Fall. Die Diagonale AC ist nicht benutzbar.

a) Um den Punkt S (Fig. 11) zu ermitteln, in welchem die gesuchte Gerade GL die Diagonale BD schneidet, ziehe man durch einen auf BD beliebig gewählten Punkt U die Geraden $l' \parallel l_2$ und $g' \parallel g_2$; der Schnitt von g', g_1 sei V, der von l', l_1 sei W. Die Ge-

rade VW ist der gesuchten Verbindungslinie parallel und bestimmt auf BD einen Abschnitt BX, mit Hilfe dessen man die Strecke BS aus der Proportion

$$BS : BX = BD : BU$$

ermitteln kann.[16]) *Anmerkung.* Wenn es die Lageverhältnisse der Figur gestatten, wird man als den Punkt U die Mitte von BD wählen, (so z. B. in Fig. 11); man braucht dann bloß BX um sich selbst zu

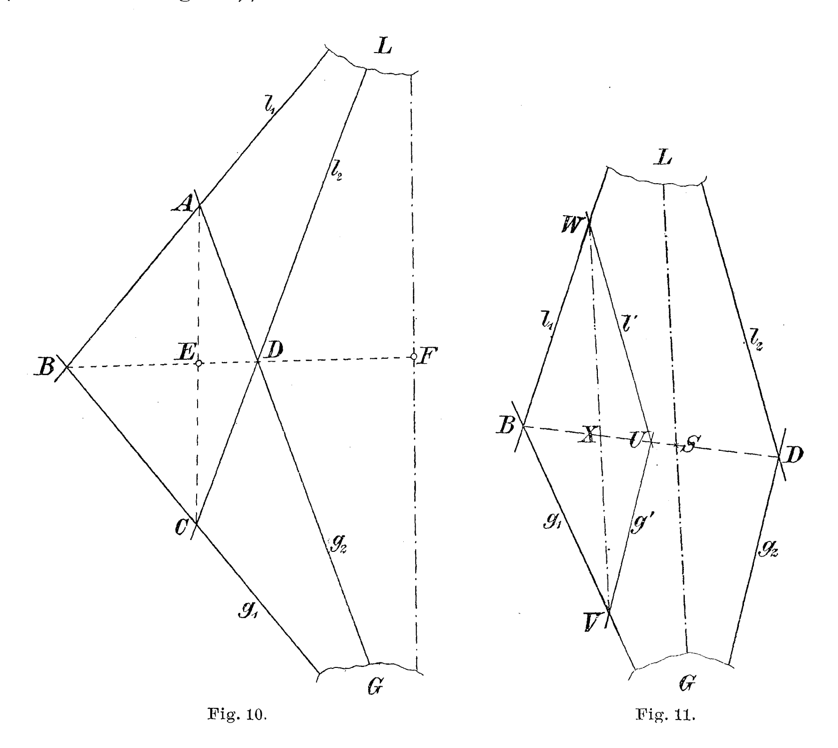


Fig. 10. Fig. 11.

verlängern, um S zu erhalten. Wo wird die Konstruktion möglicherweise ungenau? Ist VW (also auch die Richtung von LG) sicher genug bestimmt, auch wenn l_1, l_2 und g_1, g_2 sehr spitze Winkel bilden? (Nr. 4 der auf S. 8 genannten Wienerschen Sätze.)

b) Man wähle L als äußeren Ähnlichkeitspunkt für eine Reihe perspektivisch gelegener Dreiecke, die dem Dreieck BGD (Fig. 12) ähnlich sind.[17]) Theoretisch genügt es natürlich, zu BD zwei Parallele zu ziehen, diese mit l_1, l_2 zum Schnitt zu bringen und durch die erhaltenen Schnittpunkte Parallele zu g_1 bezw. g_2 zu legen; bei der

praktischen Ausführung aber wird man sich die in Fig. 12 angedeutete Genauigkeitsprobe nicht entgehen lassen.

c) Ist die soeben angegebene Konstruktion nicht ausführbar, weil selbst die „günstigsten“ Geraden g_3, g_4 (Fig. 13) sich nicht mehr auf der Zeichenfläche schneiden, so kann man durch die Schnittpunkte,

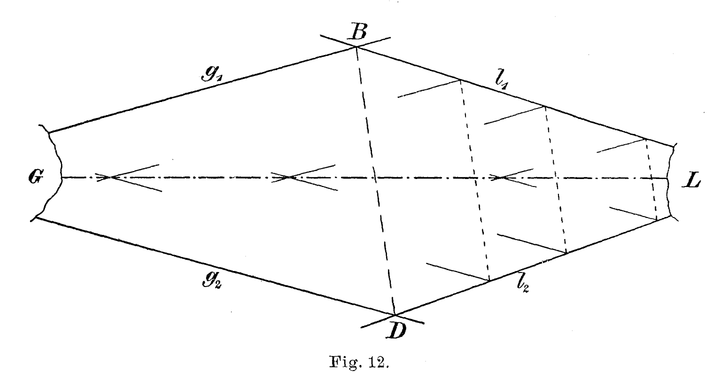


Fig. 12.

welche g_3, g_4 auf der parallel zu BD gezogenen Geraden q bestimmen, neue Geraden $l_3 \parallel l_1$ und $l_4 \parallel l_2$ legen. l_3 und l_4 bestimmen auf BD

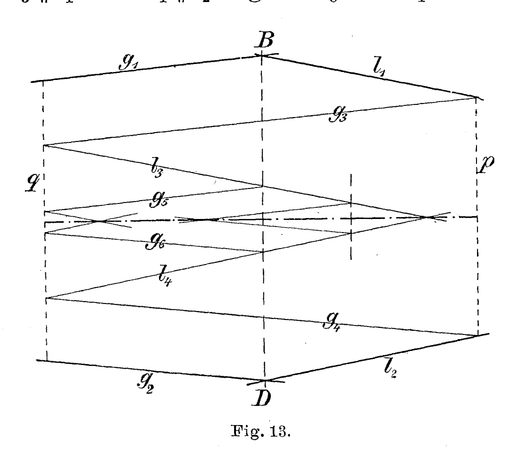


Fig. 13.

(oder einer Parallelen dazu) zwei Punkte, von denen aus man $g_5 \parallel g_1$ und $g_6 \parallel g_2$ zieht. Wenn es nötig ist, wird das Verfahren noch fortgesetzt.

Eine durch die Natur der Aufgabe bedingte Ungenauigkeit der angegebenen Konstruktionen liegt darin, daß die Diagonale BD — weil durch zwei „stumpfe“ Schnitte erzeugt — etwas unsicher ausfällt;

sonst aber sind die Lösungen b) und c) i. a. recht brauchbar. Daß z. B. l_3, l_4 oder g_5, g_6 usw. sich unter sehr kleinen Winkeln schneiden, beeinflußt die Genauigkeit nicht (vgl. wieder den 4. der Wienerschen Sätze); die übrigen Schnitte sind „gut". — Was ändert sich an diesen Aussagen, wenn g_1, g_2, l_1, l_2 die im 1. Falle angedeutete Lage haben?

Andere Lösungen der Aufgabe zu finden, wird dem Leser überlassen[18]); erwähnt sei z. B., daß die Konstruktion a) etwas modifiziert werden kann. Ist nämlich durch VW die Richtung von GL bestimmt, so kann man zu VW eine beliebige Senkrechte ziehen und damit die gestellte Aufgabe durch eine andere (siehe Nr. 6) ersetzen. Durch diese Modifikation erreicht man, wenn die Winkel (l_1, l_2) und (g_1, g_2) nicht gar zu klein sind, eine größere Genauigkeit als durch die Bestimmung von BS aus der unter a) genannten Proportion.

An die bei Aufg. 1e (vgl. Note 8 auf S. 42) bereits erwähnte Methode der *Verkleinerung des Maßstabes* sei hier noch einmal erinnert.

4. Durch den unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden die Parallele zu einer dritten zu legen.

a) (Man bemerke die Analogie mit Aufg. 3, 1.) Die Gerade g (oder eine beliebige Parallele zu ihr) schneide l_1, l_2 in G_1, G_2 (Fig. 14). Eine durch die Mitte M von G_1, G_2 gelegte Gerade p schneide l_1, l_2 in P_1, P_2. Man bestimme zu P_1, M, P_2 den vierten harmonischen, zu M zugeordneten Punkt N und lege durch ihn die Parallele zu g. — Theoretisch einfacher wäre es, durch G_1P_2 und P_1G_2 (in der Figur angedeutet) einen anderen, von M durch l_1, l_2 harmonisch getrennten Punkt von LN zu ermitteln. Doch wird wohl selten der Schnitt von G_1P_2, P_1G_2 noch erreichbar oder brauchbar sein. Überhaupt hat die ganze Konstruktion praktisch nur wenig Wert; sie versagt völlig, wenn g mit einer der Geraden l_1, l_2 einen sehr spitzen Winkel einschließt oder nahezu die Richtung der Halbierungslinie des (spitzen) Winkels (l_1, l_2) hat. Dasselbe gilt von der folgenden Lösung:

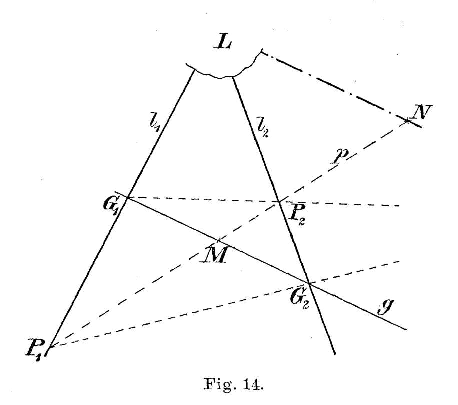


Fig. 14.

b) Eine Gerade $q \parallel l_2$ bestimme (Fig. 15) auf l_1, g die Punkte U, V. Verbindet man die Mitte W von U, V mit G_1 und zieht durch G_2 zu l_1 die Parallele, so schneidet diese $G_1 W$ in der vierten Ecke N eines Parallelogramms, von dem drei Ecken L, G_1, G_2 durch die Daten der Aufgabe bekannt sind.

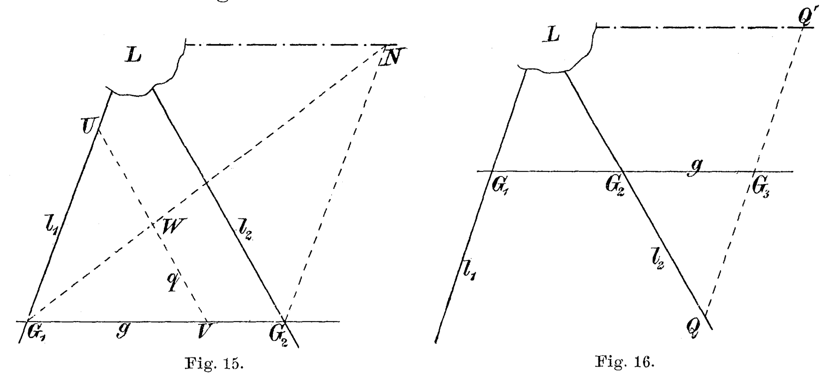


Fig. 15. Fig. 16.

c) Man verlängere (Fig. 16) das auf g (oder einer Parallelen) durch l_1, l_2 abgeschnittene Stück $G_1 G_2$ um sich selbst bis G_3, ziehe durch G_3 die Parallele zu l_1 und trage das zwischen g, l_2 gelegene Stück $Q G_3$ noch einmal bis Q' auf. Die durch Q' parallel zu g gezogene Gerade geht durch L.

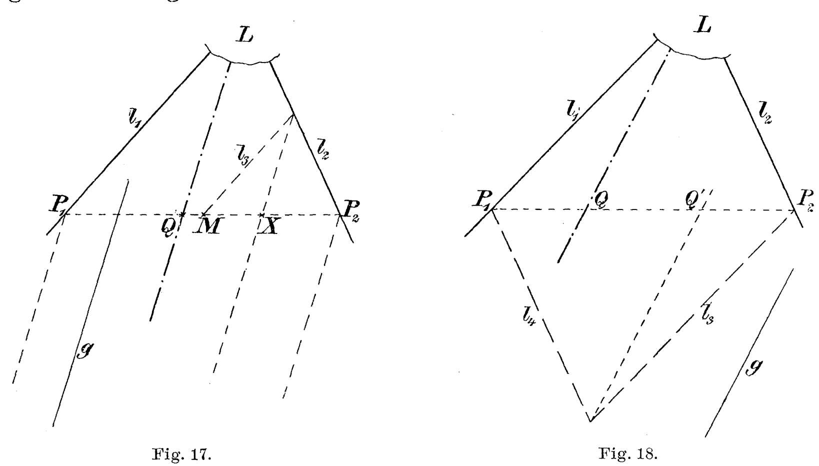


Fig. 17. Fig. 18.

d) Man schneide (Fig. 17) l_1, l_2 durch eine beliebige Gerade in den Punkten P_1, P_2, halbiere $P_1 P_2$ in M, ziehe durch M die Gerade $l_3 \parallel l_1$; die durch den Schnitt von l_2, l_3 zu g gelegte Parallele

bestimme auf $P_1 P_2$ den Punkt X. Der durch Verdoppelung von $P_2 X$ erhaltene Punkt Q liegt auf der gesuchten Geraden. — Schneiden sich l_2, l_3 nicht mehr auf der Zeichenfläche, so ist bei allgemeiner Lage des Punktes M der Abschnitt $P_2 X$ aus der Proportion

$$P_2 Q : P_2 P_1 = P_2 X : P_2 M$$

bestimmbar.

e) Man ziehe (Fig. 18) $P_1 P_2$ beliebig, lege durch P_2 die Gerade $l_3 \parallel l_1$, durch P_1 die Gerade $l_4 \parallel l_2$. Durch den Schnitt von l_3, l_4 lege man zu g die Parallele, welche $P_1 P_2$ in Q' schneidet, mache $P_2 Q = P_1 Q'$, so ist Q ein Punkt der gesuchten Geraden.

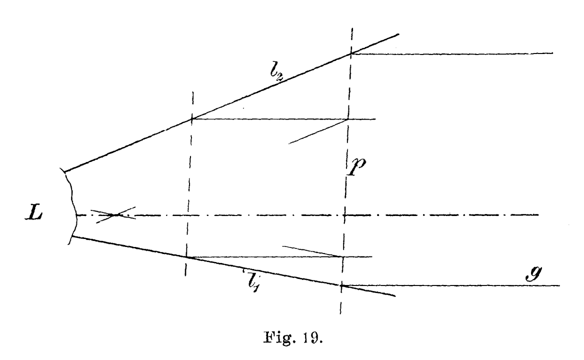


Fig. 19.

f) Man betrachte (Fig. 19) L als äußeren Ähnlichkeitspunkt für eine Reihe einseitig (nämlich parallel einer beliebigen Richtung p) begrenzter Parallelstreifen und verfahre nach Analogie der Aufgabe 3 (2. Fall) c.

Anmerkung. Der Schüler mache sich bei den hier angegebenen Lösungen[19]) klar, ob und inwiefern eine Spezialisierung der bei Aufg. 3 ausgeführten Lösungen vorliegt ($g_1 \parallel g_2 \parallel g$; G ins Unendliche gerückt).

5. Ein Polygon, von welchem eine Ecke unzugänglich ist, so zu verwandeln, daß die unzugängliche Ecke fortfällt.

Man verbinde die der unzugänglichen Ecke X zunächst gelegenen Ecken A, B und lege nach der vorigen Aufgabe eine Parallele zu AB durch X. — Vgl. S. 43, Zusatz hinter Note 19.

6. Von dem unzugänglichen Schnittpunkte A zweier Geraden b, c auf eine dritte Gerade a das Lot zu fällen.

1. Fall. Die Schnittpunkte von a mit b, c sind zugänglich. Die Gerade a schneide (Fig. 20) b, c in C, B; man fälle von B, C

auf b, c die Lote h', h'', die sich in H schneiden. Das von H auf a gefällte Lot geht durch A, ist also das verlangte. (*Beweis:* H ist der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks ABC.)

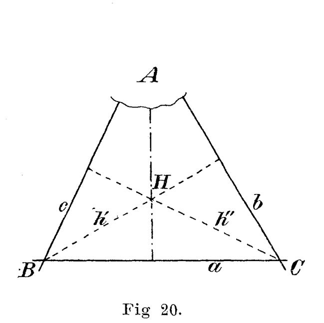


Fig 20.

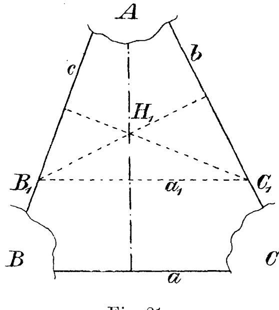


Fig. 21.

2. Fall. Die Schnittpunkte von a mit b, c sind unzugänglich. Man ziehe (Fig. 21) die Gerade $a_1 \parallel a$ und verfahre mit a_1, b, c wie beim 1. Fall. Vgl. Aufgabe 11c.[20])

7. Eine Dreiecksseite BC zu halbieren, wenn die beiden begrenzenden Ecken unzugänglich sind.

1. Fall. Die dritte Ecke A ist zugänglich. Man zeichne (Fig. 22) zu BC eine Parallele B_1C_1 und verbinde deren Mitte D_1 mit A; die Verbindungslinie AD_1 halbiert BC in D. (AD ist Schwerpunktstransversale von ABC und AB_1C_1.) — *Muß* man B_1C_1 *halbieren,* um AD zu erhalten? (Ziehe noch $B_2C_2 \parallel B_1C_1$; die Verbindungslinien B_1C_2, B_2C_1 schneiden sich auf AD.)

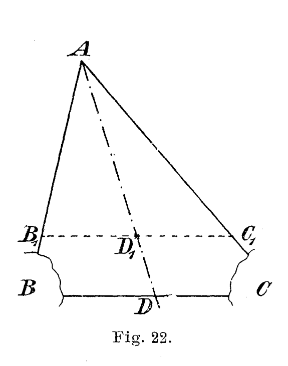


Fig. 22.

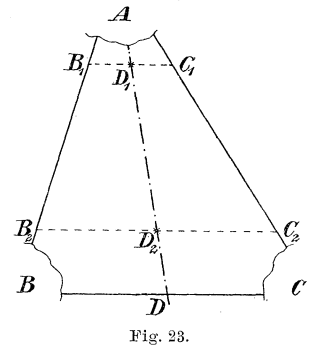


Fig. 23.

2. Fall. Die dritte Ecke A ist unzugänglich. Man ziehe (Fig. 23) zu BC zwei Parallele B_1C_1 und B_2C_2 und verbinde deren

Mitten D_1 und D_2. Wovon wird (abgesehen von den Daten der Aufgabe) die Genauigkeit dieser Konstruktion abhängen? (Nr. 1 auf S. 8.)

8. Einen Winkel, dessen Scheitel unzugänglich ist, zu halbieren.

a) Man betrachte die gesuchte Halbierungslinie als geometrischen Ort der Punkte, die von den Schenkeln u, v (Fig. 24) gleichweit entfernt sind.[21] Bleibt die Konstruktion genau, wenn (u, v) ein sehr kleiner Winkel ist?

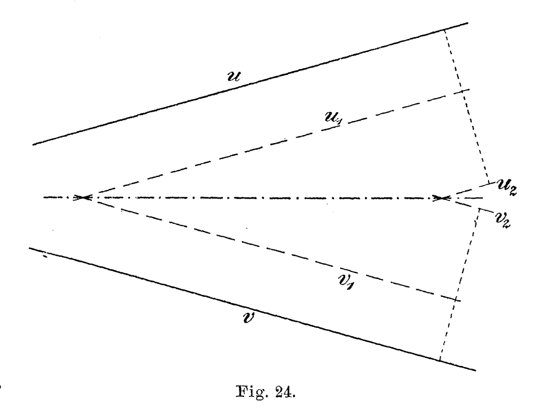


Fig. 24.

b) Man zeichne (Fig. 25) $AB \perp u$, ebenso $BC \perp v$; die Halbierungslinie BB' des Winkels ABC steht auf der gesuchten Halbierungslinie senkrecht. (*Beweis!*) Man braucht also nur zu BB' das Mittellot zu konstruieren. — *Genauigkeitsprobe:* Zu BB' eine (oder zwei) Parallele ziehen und die Endpunkte mit B, B' (oder unter sich) kreuzweise verbinden.

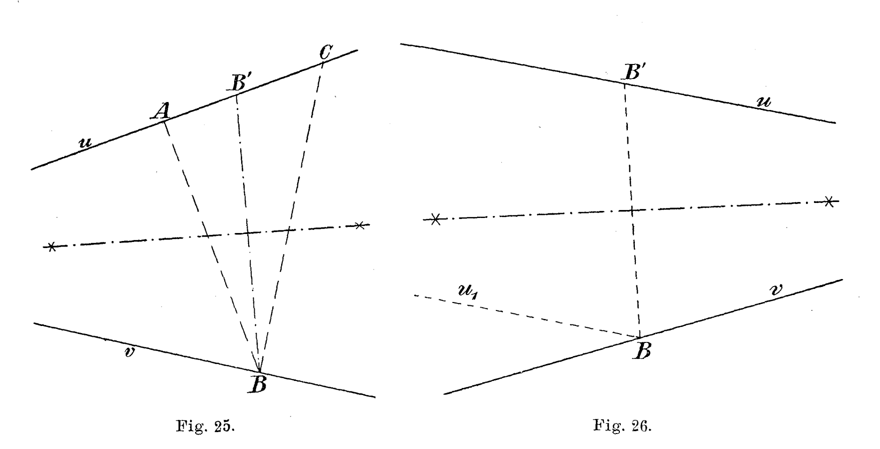


Fig. 25.

Fig. 26.

c) Durch einen auf v (Fig. 26) beliebig gewählten Punkt B ziehe man $u_1 \parallel u$. Zur Halbierungslinie BB' des (stumpfen) Winkels (v, u_1) konstruiere man das Mittellot.[22]

d) Eine sehr hübsche, zuerst von Witting[23]) angegebene Konstruktion ist besonders bei sehr kleinem Winkel (u, v) empfehlenswert. Man schneide u, v (Fig. 27) durch zwei beliebige Parallelen MN und PQ, mache $MP = MP' = MP''$ und $NQ = NQ' = NQ''$. Der Schnitt von

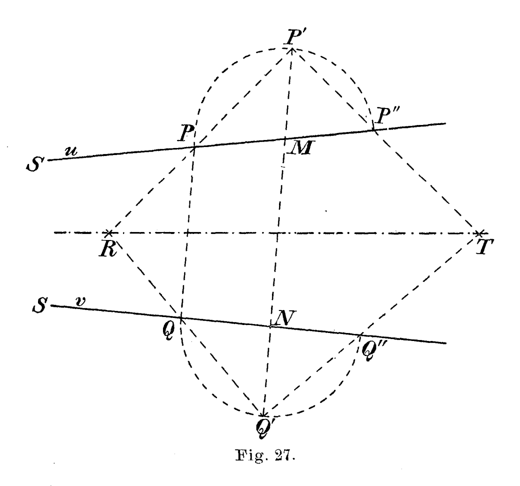


Fig. 27.

PP' und QQ' sei R, der von $P'P''$ und $Q'Q''$ sei T; die Gerade RT ist die gesuchte Halbierungslinie. Der *Beweis* folgt aus dem Satze, daß die Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel (im $\triangle\ PSQ$) oder Außenwinkel (im $\triangle\ P''SQ''$) sich auf der Halbierungslinie des dritten Dreieckswinkels schneiden.

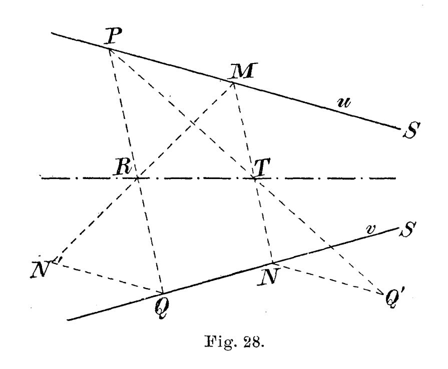


Fig. 28.

e) Eine andere, ebenfalls von Witting herrührende Konstruktion macht von dem Satze Gebrauch, daß die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels die Gegenseite (PQ oder MN in Fig. 28) im Verhältnis der beiden anliegenden teilt. Die beiden Parallelen MN, PQ bedingen die Proportion

$$SP : SQ = SM : SN = PM : QN;$$

man braucht also nur PQ und MN im Verhältnis $PM : QN$ zu teilen, etwa so: $QN' \parallel NQ' \parallel u$, $QN' = NQ' = QN$. MN' schneidet PQ in R, PQ' schneidet MN in T; RT ist die gesuchte Halbierungslinie.

9. Den eingeschriebenen Kreis eines Dreiecks zu zeichnen, wenn die Ecken unzugänglich sind.

Man halbiere nach einer der soeben besprochenen Methoden zwei Winkel des Dreiecks und verfahre dann wie gewöhnlich. Die *Genauigkeitsprobe* ist sehr bequem.

10. Den umgeschriebenen Kreis eines Dreiecks zu ermitteln, dessen Ecken unzugänglich sind.

Die Aufgabe hat den Sinn, daß man den Mittelpunkt und den Radius des Kreises angeben soll.[21])

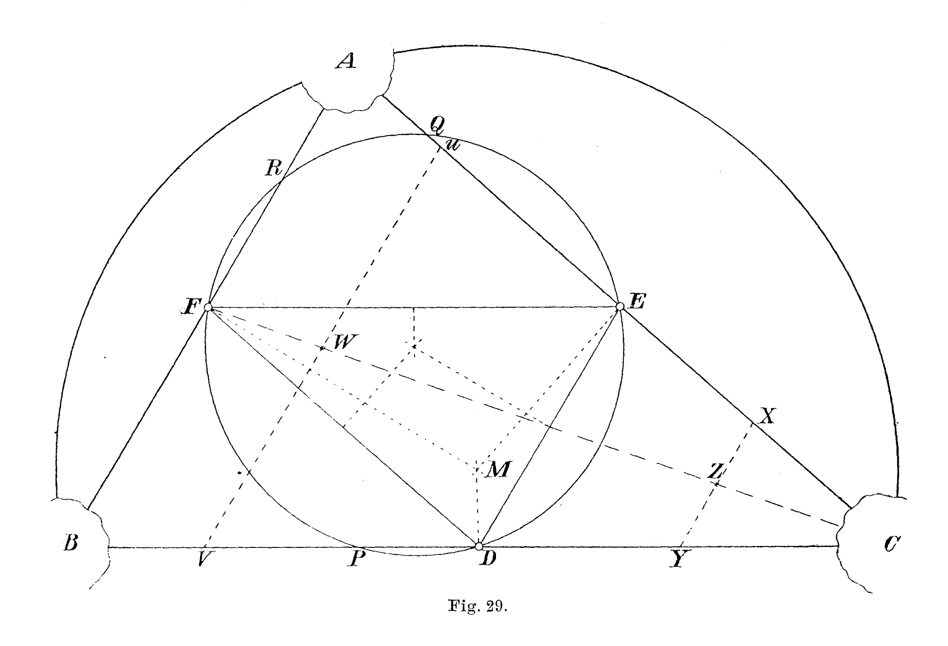


Fig. 29.

Man ziehe (Fig. 29) zu einer Dreiecksseite z. B. AB zwei Parallele XY und UV, ermittele dadurch (nach Aufg. 7, 2) die Mitte F von AB und ziehe durch F zu AC, BC die Parallelen FD, FE. Die in D, E, F auf den Dreiecksseiten errichteten Lote schneiden sich in dem gesuchten Mittelpunkte M. Um auch den Radius des gesuchten Kreises zu finden, konstruiere man zum „Mittendreieck“ den umgeschriebenen Kreis und verdoppele dessen Radius. — Die Aufgabe läßt sich in gewisser Weise verknüpfen mit der folgenden:

11. In einem Dreieck mit unzugänglichen Ecken die Höhen zu konstruieren.

a) Ist der Satz vom *Neunpunktekreis* dem Zeichner bekannt, so kann er die Höhenfußpunkte P, Q, R schon aus der vorigen Fig. 29 entnehmen als die Punkte, in denen der Feuerbachsche Kreis (DEF) die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC je zum zweiten Male schneidet. — Wenn die Winkel, unter denen der Kreis alle (oder wenigstens zwei) Seiten des Dreiecks schneidet, verhältnismäßig klein sind, so erscheinen die gesuchten Höhenfußpunkte durch den Kreis allein nicht sicher genug bestimmt. Auf diesen Fall brauchen wir hier nicht weiter einzugehen, er läßt sich durch Aufgabe 26 (S. 38) erledigen. — Den Grad der erreichten Genauigkeit prüft man am besten, indem man in P, Q, R die Lote wirklich errichtet.

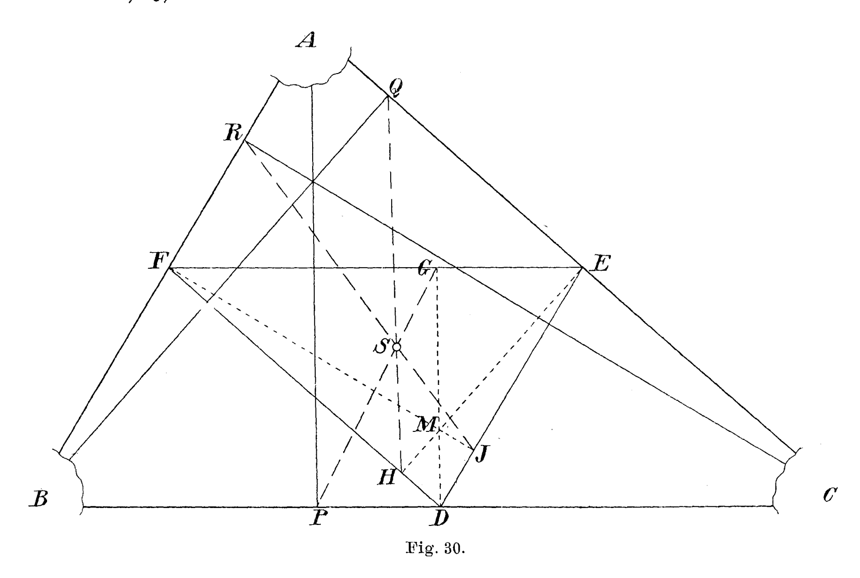


Fig. 30.

b) Man kann auch die (Fig. 29) schon gezeichneten Mittelsenkrechten MD, ME, MF auffassen als Höhen DG, EH, FJ des Mittendreiecks. (Der Deutlichkeit wegen ist Fig. 30 neu entworfen.) Der gemeinsame Schwerpunkt S von ABC und DEF ist in Fig. 29 auch schon bekannt (etwa durch CF und die Verbindungslinie von D mit der Mitte von EF). Man braucht also nur G, H, J mit S zu verbinden, um P, Q, R zu erhalten. (*Beweis:* Der gemeinsame Schwerpunkt S ist innerer Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC, DEF.)

c) Wenn von dem Dreieck nur die Höhen gesucht werden, Fig. 29 also noch nicht gezeichnet vorliegt, so ist es natürlich am einfachsten, auf eine der Ecken, z. B. A die Aufg. 6 anzuwenden und

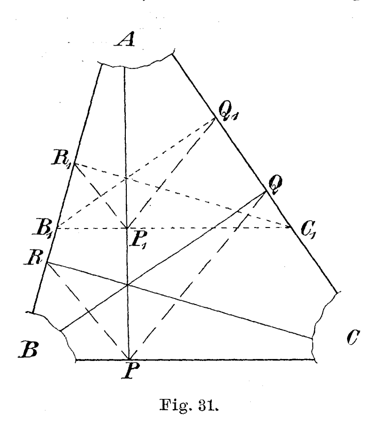


Fig. 31.

dann durch P (Fig. 31) zu $P_1 Q_1$, $P_1 R_1$ die Parallelen PQ, PR zu ziehen.[25]) — Man versäume nicht, eine Genauigkeitsprobe zu machen.

---

2. Aufgaben aus der Kreislehre.

12. Eine Gerade schneidet einen Kreis so, daß der eine der beiden Schnittpunkte unzugänglich wird; dieser soll durch den Schnitt zweier Geraden ersetzt werden.

a) Die gegebene Gerade g schneide (Fig. 32) den Kreis außer in dem unzugänglichen Punkte S noch in G. Man ziehe $GD \perp g$; der Durchmesser DM geht durch S (Thales). Wenn der diametrale Gegenpunkt von S nicht mehr benutzbar ist, aber G noch auf dem Zeichenblatte liegt, so kann man

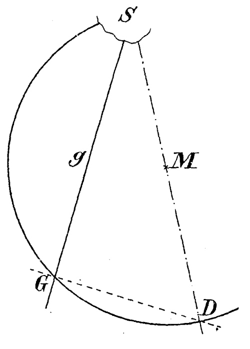


Fig. 32.

b) $MX \perp g$ ziehen und den Winkel XMG um MX umklappen.

c) Ist M zugänglich, G aber nicht, so wähle man auf g zwei Punkte U, V (Fig. 33), drehe die Strecke UV um M in eine neue Lage (indem man in bekannter Weise U, V

auf konzentrischen Kreisen laufen läßt). Der von $U_1 V_1$ auf dem gegebenen Kreise bestimmte Punkt S_1 entspricht dem Punkte S; man braucht also nur das Dreieck $M V_1 S_1$ zurückzudrehen, um die Richtung MS zu erhalten. — Wie wird man das „Zurückdrehen“ am zweckmäßigsten ausführen? Wird man $UW = U_1 W_1$ abmessen, oder lieber $W_1 W = U_1 U$?

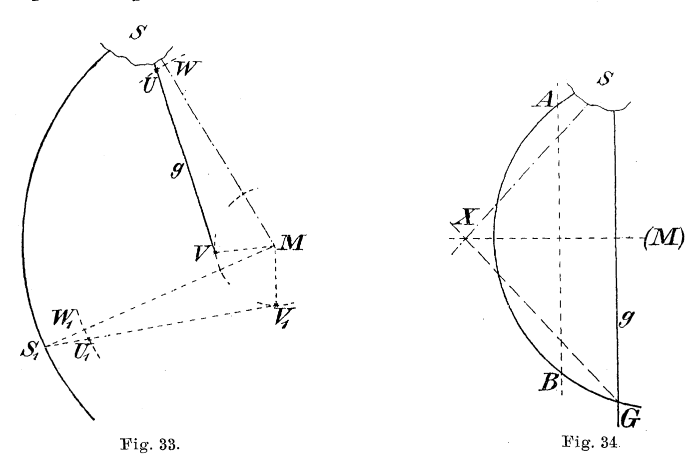


Fig. 33. Fig. 34.

d) Ist der Mittelpunkt M nicht benutzbar, wohl aber (wie in b) der Punkt G, so kann man (Fig. 34) zu g eine beliebige parallele Sehne AB ziehen, auf ihrem Mittellot (welches zugleich das von GS ist) einen Punkt X wählen und den Winkel MXG um MX umklappen.

13. Einen Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt einer Geraden und eines Kreises geradlinig zu verbinden.

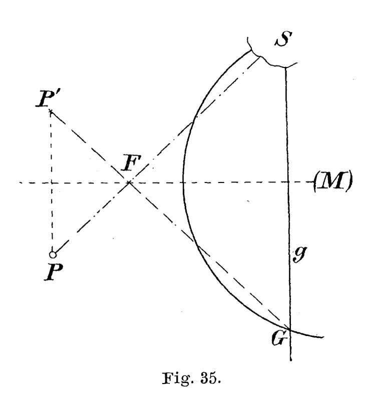


Fig. 35.

Man zeichne direkt (wenn M zugänglich ist) oder mit Hilfe einer Parallelen zu g (wie Fig. 34) die Mittelsenkrechte von SG (Fig. 35) und bestimme in bezug auf dieses Mittellot den symmetrischen Gegenpunkt P' von P. Die Verbindungslinie $P'G$ schneide das Mittellot von SG in F. PF ist die verlangte Verbindungslinie. — Wie wird man verfahren, wenn PS nahezu parallel FM wird? Welche Genauigkeitsprobe steht zur Verfügung? — Daß man die

Aufgabe auch mit Hilfe von Nr. 12 und 1 lösen kann, ist selbstverständlich; doch wird diese Konstruktion wohl nur selten der soeben angegebenen vorzuziehen sein.

14. Einen Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Kreise geradlinig zu verbinden.

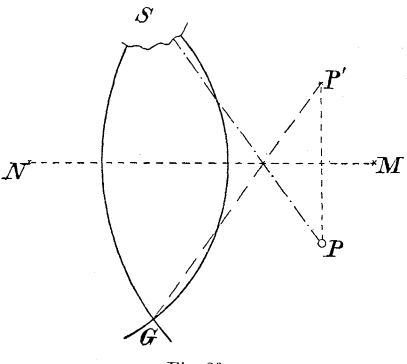


Fig. 36.

Man ziehe (Fig. 36) die gemeinschaftliche Zentrale MN beider Kreise, spiegele (wie in Nr. 13) den Punkt P an MN, verbinde den Gegenpunkt P' mit dem zugänglichen Schnittpunkt G der Kreise und ziehe PS symmetrisch zu $P'G$.

15. Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise K, K' zu zeichnen, deren Schnittpunkte unzugänglich sind.

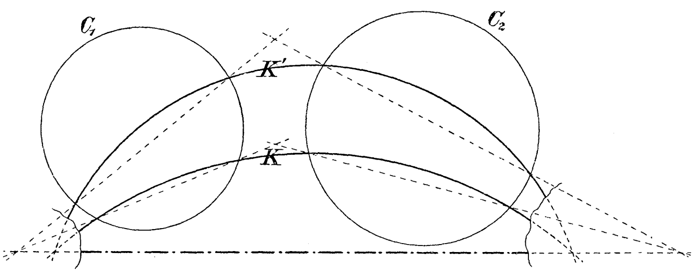


Fig. 37.

Man betrachte die gemeinschaftliche Sehne als Potenzlinie[26]) von K und K', schneide beide Kreise durch zwei Hilfskreise C_1 und C_2 (Fig. 37) und benutze den Satz, daß die Chordalen dreier Kreise sich

in einem Punkte schneiden, zweimal, nämlich bei K, K', C_1 und bei K, K', C_2. Die beiden unzugänglichen Chordalpunkte hat man nach Aufg. 3 zu verbinden. Sind die Mittelpunkte der Kreise zugänglich, so ist es i. a. einfacher und genauer, die Aufgabe auf Nr. 6 zurückzuführen. (Die Chordale schneidet die Zentrale rechtwinklig.)

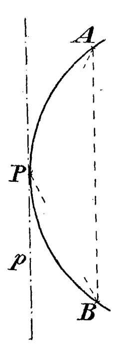


Fig. 38.

16. An einen Kreis, dessen Mittelpunkt unzugänglich ist, soll in einem gegebenen Punkte die Tangente gelegt werden.

Man trage (Fig. 38) von dem gegebenen Punkte P aus zwei beliebige, aber gleiche Strecken $PA = PB$ als Sehnen in den Kreis ein und ziehe durch P die Gerade $p \parallel AB$; p ist die gesuchte Tangente.[27] (*Beweis!*)

17. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade (oder einen gegebenen Kreis) in einem gegebenen Punkte berührt und durch den unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden geht.[28])

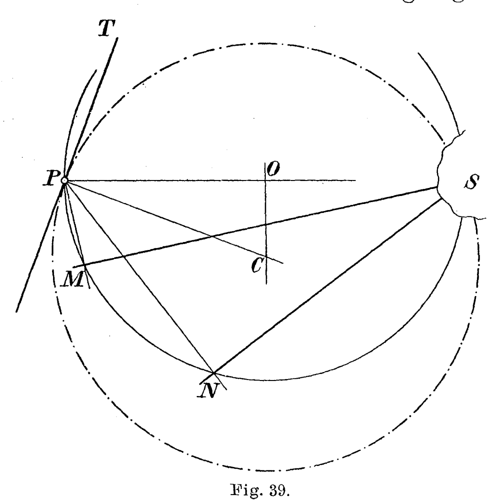


Fig. 39.

Es sei P (Fig. 39) der gegebene Punkt auf der gegebenen Tangente PT. [Wenn statt dieser ein *Kreis* gegeben ist, so läßt sich PT (wenn nicht anders, dann nach Nr. 16) finden.]

Man fälle von P auf die gegebenen Geraden die Lote PM, PN und konstruiere den Mittelpunkt O des Kreises (PMN). Da PMS, PNS rechte Winkel sind, so geht PO durch S, also ist die in O auf PO errichtete Senkrechte OC ein Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Ein zweiter Ort ist die Gerade $PC \perp PT$.

18. Von einem Kreise mit unzugänglichem Mittelpunkt sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben; man soll die Tangenten in ihnen konstruieren.

Man zeichne (Fig. 40) die Mittellote DM, EM auf P_2P_3, P_1P_2, verlängere die Strecken P_1P_2, P_2P_3, bis sie DM, EM in Q, R schneiden. QR ist der gesuchten Tangente in P_2 parallel.[29]) *Beweis*: QE, RD sind (nach Konstruktion) Höhen des Dreiecks MQR; also steht P_2M auf QR senkrecht. P_2M ist aber ein Radius, demnach QR die Richtung der Tangente.

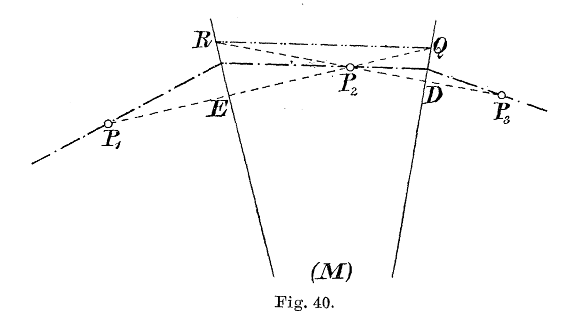


Fig. 40.

19. Ein Kreis K mit unzugänglichem Mittelpunkt ist durch drei Punkte $P_1P_2P_3$ gegeben, ein anderer K' vollständig gezeichnet. Die Chordale von K, K' ist zu konstruieren.

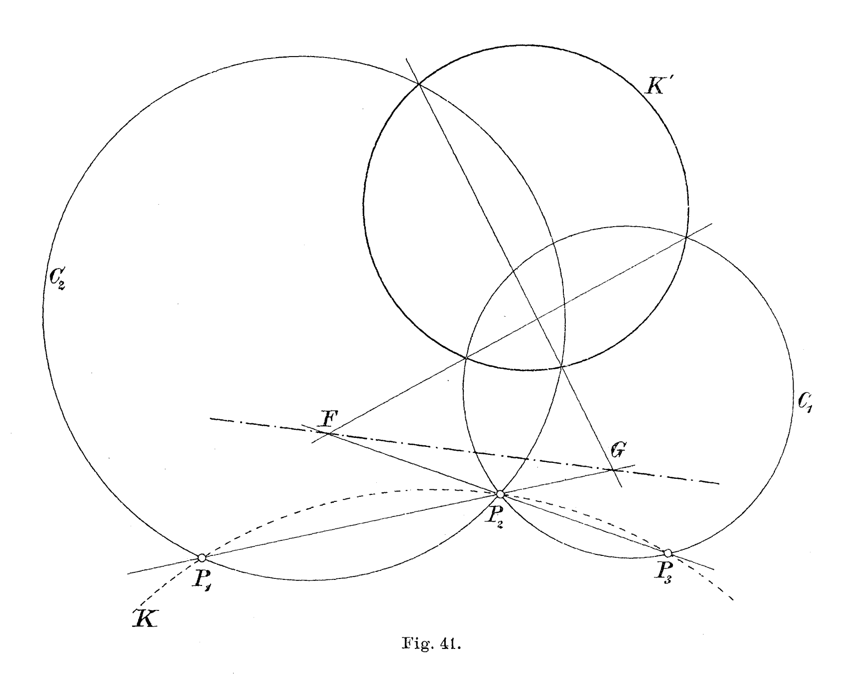


Fig. 41.

Man lege (Fig. 41) durch die Punkte P_2, P_3 einen Hilfskreis C_1, welcher K' schneidet. Der Chordalpunkt von K, K', C_1 sei F; ebenso

lege man durch P_1, P_2 einen Hilfskreis C_2, welcher K' schneidet. Das Potenzzentrum von K, K', C_2 sei G. FG ist die gesuchte Chordale von K, K' (vgl. Aufg. 15).

20. An einen Kreis von dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden die Tangenten zu legen.

a) Man kann noch vorschreiben, daß zur Lösung *nur das Lineal* benutzt werde.[30]) Man legt in diesem Falle (nach 1a) durch S zwei beliebige Sekanten AB, CD (Fig. 42) und zieht die Geradenpaare AC, BD und AD, BC; der Schnittpunkt des ersten Paares sei E,

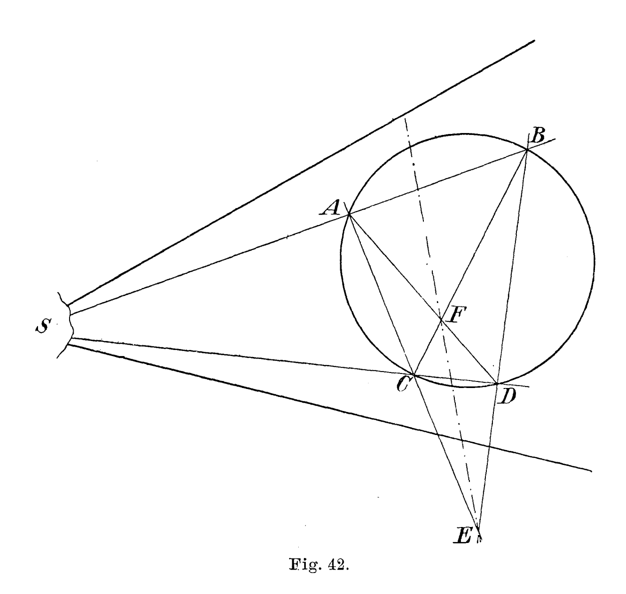


Fig. 42.

der des zweiten F. Die Verbindungslinie der Punkte E, F schneidet den Kreis in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten. Der *Beweis* beruht auf dem aus der Lehre von den Kreispolaren bekannten Satze, daß EF die Polare von S in bezug auf den Kreis ist. — Die Konstruktion gilt, wie durch Zentralprojektion sofort hervorgeht, ohne weiteres auch für Kegelschnitte. Der zum Beweise dienende Satz lautet dort: Die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, das einer Kurve zweiter Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich in den Eckpunkten eines Poldreiecks der Kurve. — Die Konstruktion ist praktisch nur empfehlenswert, wenn die beiden gegebenen

Geraden schon Sekanten des Kreises (oder Kegelschnittes) sind; die oben angedeutete Ausführung von Aufg. 1a ist umständlich und nur selten genau genug.

b) Man ziehe von dem Mittelpunkte M des Kreises nach den beiden gegebenen Geraden passend gewählte, sonst beliebige Strecken

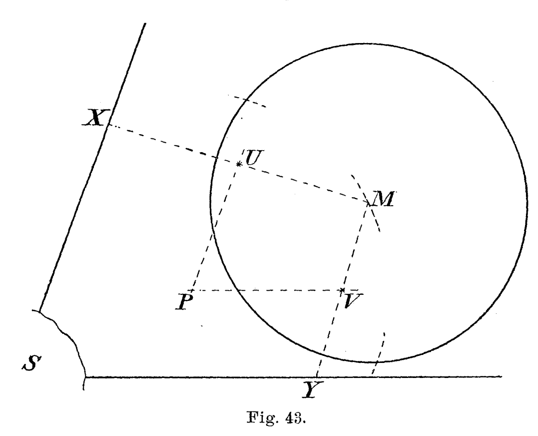


Fig. 43.

MX, MY (Fig. 43), halbiere MX in U, MY in V, ziehe durch U zu SX, durch V zu SY die Parallele. Die beiden erhaltenen Geraden schneiden sich in dem Mittelpunkt P von MS. (Hierin steckt eine Lösung der Aufgabe 1. Welche?) Der Kreis um P mit PM als Radius schneidet bekanntlich aus dem gegebenen Kreise die Berührungspunkte aus. — Die Konstruktion wird unsicher, wenn der Winkel XSY klein ist; sie versagt, wenn P nicht mehr auf der Zeichenfläche liegt.

c) Fällt man vom Mittelpunkte M des gegebenen Kreises K (Fig. 44) auf die gegebenen Geraden die Lote MA, MB, so sind die Berührungspunkte der Tangenten als diejenigen Punkte bestimmbar, in denen der Kreis (AMB) den Kreis K schneidet. Man hat also nur (nach Aufg. 19) durch A, M und B, M zwei

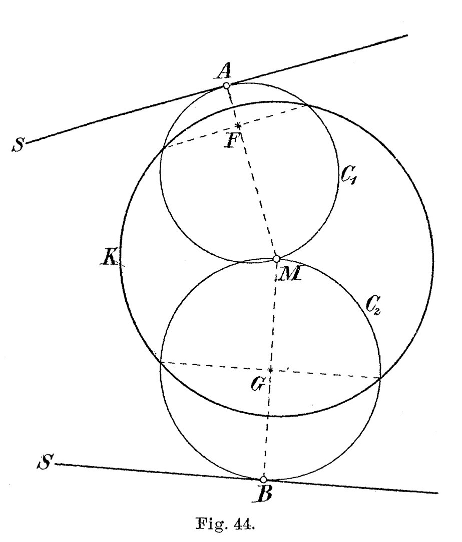


Fig. 44.

Hilfskreise C_1 und C_2 zu legen und die Chordalpunkte F und G zu verbinden. — Kommt eine der gegebenen Geraden z. B. SA dem Mittelpunkt M sehr nahe, so ist die soeben angegebene Konstruktion immer noch brauchbar. Man bestimme (Fig. 45) den Chordalpunkt G wie vorher, außerdem aber auch die Punkte C, D, in denen die Lote MA, MB die Geraden BS, AS schneiden, und beachte, daß MS als dritte Höhe des Dreiecks CDS auf CD senkrecht steht. MS ist aber die gemeinschaftliche Zentrale der Kreise K und (MAB). Auf dieser Zentrale steht wieder die gesuchte, durch G gehende Chordale von K und (MAB) senkrecht. Man hat also nur durch G die Parallele zu CD zu legen.

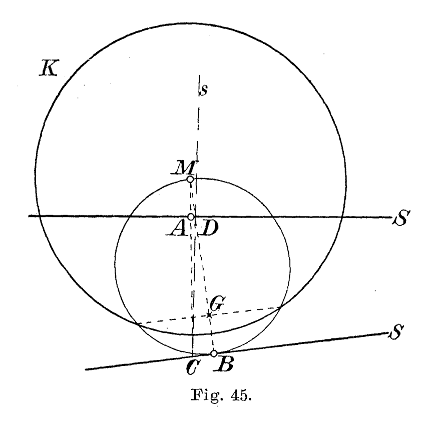


Fig. 45.

21. Von zwei Kreisen, deren Mittelpunkte P, Q unzugänglich sind, kennt man je drei Punkte $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$; die Chordale der beiden Kreise ist zu zeichnen.[31])

a) Man wähle einen passend gelegenen Hilfskreis C_1 und bestimme (nach Aufg. 19) die Chordale der Kreise C_1 und $(P_1 P_2 P_3)$, ebenso die Chordale der Kreise C_1 und $(Q_1 Q_2 Q_3)$; der Chordalpunkt der Kreise C_1, $(P_1 P_2 P_3)$, $(Q_1 Q_2 Q_3)$ sei F. Die Konstruktion wiederhole man bei einem zweiten Hilfskreise C_2; der Chordalpunkt sei G. FG ist die gesuchte Gerade. — Meist wird es zweckmäßiger sein, den Hilfskreisen eine spezielle Lage zu geben und etwa folgendermaßen zu verfahren:

b) Die unzugänglichen Mittelpunkte P, Q seien durch die (in Fig. 46 nur angedeuteten) Mittellote auf P_1P_2, P_2P_3, Q_1Q_2, Q_2Q_3 bestimmt. Man wähle drei nicht zu einem der gegebenen Tripel gehörige Punkte, z. B. P_1, Q_2, Q_3 und verbinde*) den Mittelpunkt M

*) In Fig. 46 ist die Verbindungslinie MP (ebenso NQ) nur gezogen, um dem Beschauer der Figur deutlicher zu machen, daß $PP' \perp PM$ ist. Daß man bei der praktischen Ausführung der Konstruktion nicht MP wirklich zeichnet, ist selbstverständlich; man braucht ja nicht MP, sondern nur die Senkrechte zu MP durch P_1. Diese Senkrechte wird man nach Analogie von Aufg. 1f ermitteln; die dort mit l_1, l_2 bezeichneten Geraden sind hier die zur Bestimmung von P dienenden Mittellote, dem dort gegebenen Punkt P entspricht hier M, die dort mit G_1F_2 bezeichnete Gerade gibt hier die Richtung von P_1P' an.

des durch diese drei Punkte gehenden Kreises mit P. Die von P_1 auf MP gefällte Senkrechte ($P_1 P'$) schneidet $Q_1 Q_2$ in einem Punkte der gesuchten Chordale, nämlich in dem Chordalpunkt der drei Kreise um M, P, Q. Führt man dieselbe Konstruktion bei den drei anderen Punkten Q_1, P_2, P_3 aus, so ist die Aufgabe gelöst.

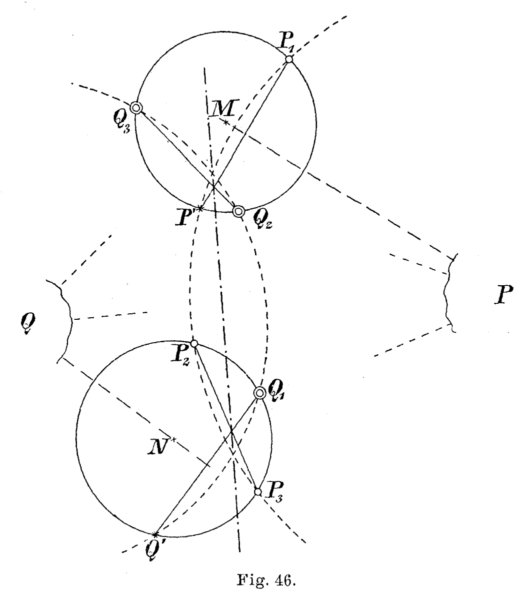


Fig. 46.

Anmerkung. Liegen die Punkte $P_1, \ldots Q_3$ von vornherein ungünstig, so kann man sie durch andere ersetzen; z. B. könnte man im zweiten Teil der Konstruktion statt des Punktes Q_1 auch den symmetrischen Gegenpunkt von Q_3 in bezug auf das Mittellot von $Q_1 Q_2$ wählen.

22. Die Endpunkte P und Q einer „fernen" Strecke sind durch die Geradenpaare a, b und c, d gegeben. Die Richtung der Strecke PQ (oder auch die dazu senkrechte) zu bestimmen.

„Die Auflösung beruht auf dem Gedanken, daß man P und Q als die Mittelpunkte zweier Kreise ansieht und deren Chordale konstruiert, die ja auf der Zentrale PQ senkrecht steht."[32])

[Vorbemerkung. Es seien (Fig. 47) zwei Kreise um P und Q gezeichnet, in dem einen ihrer Schnittpunkte (R) die Tangenten konstruiert und auf ihnen von R aus beliebige aber gleiche Strecken

RP_1, RQ_1 abgemessen. Zeichnet man einen Kreis um P durch P_1, um Q durch Q_1, so haben diese beiden Kreise dieselbe Chordale wie die beiden ersten. (*Beweis* folgt aus der Definition der Chordale und aus einem bekannten Satze über konzentrische Kreise.) — Hier kommt besonders in Betracht, daß die Chordale der neuen Kreise durch R geht.]

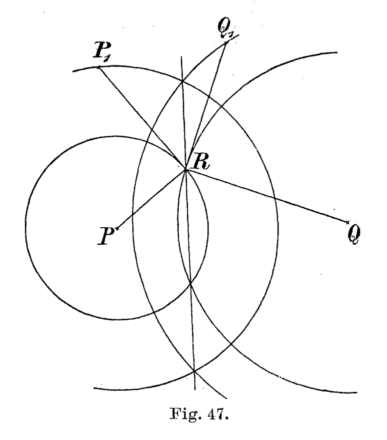


Fig. 47.

Man errichte (Fig. 48) auf den Geraden b und c in ihrem Schnittpunkt R die Lote, messe auf diesen $RP_1 = RQ_1$ ab und bestimme zu P_1 in bezug auf a und b die Gegenpunkte P_2 und P_3, ebenso zu Q_1 in bezug auf d und c die Gegenpunkte Q_2 und Q_3. Die Chordale der Kreise $(P_1 P_2 P_3)$, $(Q_1 Q_2 Q_3)$ ist die gesuchte; da sie (nach der Vorbemerkung) durch R geht, so hat man nur noch einen Punkt F der Chordale (wie in Aufg. 21) mittels des Kreises $(P_1 Q_2 Q_3)$ zu kon-

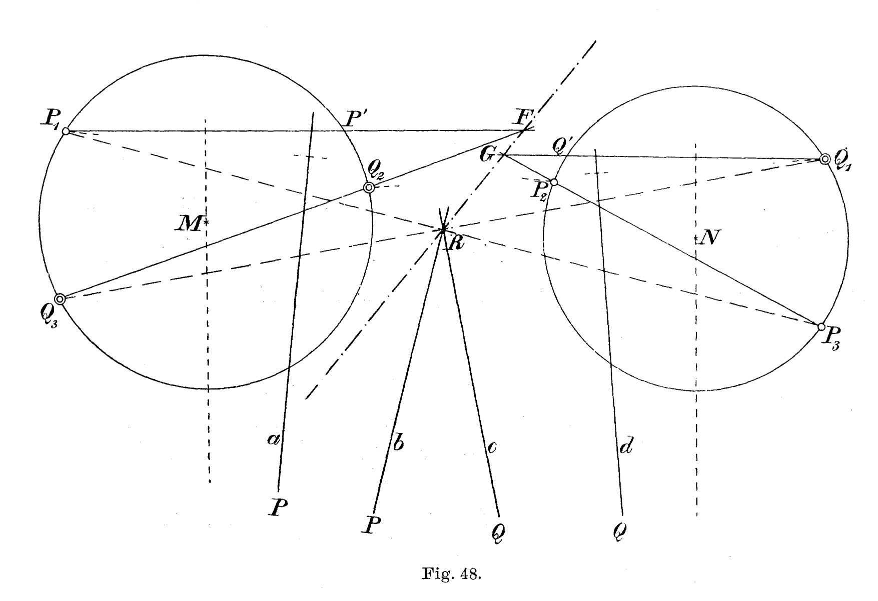


Fig. 48.

struieren. Als *Genauigkeitsprobe* kann die Ermittelung eines zweiten Punktes (G) der Chordale dienen.

Da man über die Länge von $RP_1 = RQ_1$ beliebig verfügen kann, so ist man in der Lage, die Punkte $P_1, \ldots Q_3$ so günstig wie möglich zu wählen.

Es ist klar, daß beim praktischen Zeichnen noch zahlreiche andere Aufgaben vorkommen, bei denen Punkte, die für die Konstruktion wichtig sind, außerhalb des Zeichenblattes liegen. Doch sollen weitere Aufgaben dieser Art, von denen einige sich auch in der Literatur[33]) finden, hier nicht behandelt werden. Um eine Aufgabe zu nennen, die mir in der Literatur nicht begegnet ist, möchte ich dem Leser vorschlagen, einen Kreis zu konstruieren, der eine Gerade l berührt und durch zwei Punkte P, P' geht, und zwar für den Fall, daß *die Gerade l der Verbindungslinie PP' nahezu parallel ist.*

II. Unsichere Schnitte.

1. Schnitte von Geraden.

Unter den hierher gehörigen Aufgaben mag eine, die vielfach in Lehrbüchern behandelt wird, gleich an erster Stelle genannt werden; es sei jedoch hier schon ausdrücklich bemerkt, daß die Konstruktion zwar theoretisch richtig, aber praktisch im allgemeinen bedeutungslos ist, was in der Regel nicht genügend hervorgehoben wird.[34])

23. Den Schnittpunkt S zweier Geraden l_1 und l_2, die einen sehr spitzen Winkel einschließen, genauer zu bestimmen.

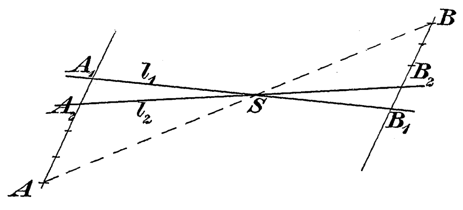


Fig. 49.

Man schneide die Geraden l_1, l_2 durch zwei Parallele (Fig. 49) und verlängere die von l_1 und l_2 begrenzten Stücke dieser Parallelen

($A_1 A_2$ und $B_1 B_2$) je n-mal um sich selbst bis A und B; die Verbindungslinie AB geht durch S. (*Beweis* mit Hilfe des Proportionallehrsatzes.)

Daß diese Konstruktion i. a. praktisch nicht brauchbar ist, erkennt man besonders gut aus der folgenden Aufgabe, die, wie man sogleich bemerken wird, zu der soeben genannten in gewissem Sinne dual ist.

24. Die Verbindungslinie zweier sehr nahe aneinander gelegenen Punkte P, Q genauer zu bestimmen.

Man lege durch P, Q zwei beliebige Gerade, die sich in S schneiden (Fig. 50), und verlängere SP und SQ gleich oft um sich selbst bis P', Q'. Die Verbindungslinie $P'Q'$ ist dann der zu bestimmenden Geraden PQ parallel (*Beweis* wie vorher) und braucht also nur parallel verschoben zu werden, bis sie durch *einen* der Punkte P, Q geht.[35])

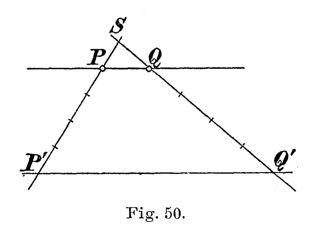


Fig. 50.

Die hier gegebenen Lösungen der beiden Aufgaben haben, wie schon zweimal betont, für die Praxis so gut wie keinen Wert, und zwar aus folgenden *Gründen.* Jede Messung ist mit einem kleinen Fehler behaftet, der sich um so stärker bemerkbar macht, je kleiner die abgemessene Strecke ist. Bei der n-maligen Verlängerung einer kleinen Strecke um sich selbst wird dieser Messungsfehler n-mal gemacht, allerdings nicht immer in demselben Sinne, vielmehr werden sich in der Regel die begangenen Ungenauigkeiten bis zu einem gewissen Grade aufheben, aber dennoch wird die Unsicherheit, mit der etwa bei der Aufg. 23 der Schnittpunkt S von vornherein bestimmt erscheint, im allgemeinen durch die angegebenen Hilfskonstruktionen nicht geringer; allenfalls könnte man durch mehrmalige Ausführung der Konstruktion (natürlich an anderen Parallelenpaaren) den Punkt S *überbestimmen,* doch muß man dabei bedenken, „daß es eine mühsame und mißliche Sache ist, den Grad der absoluten Genauigkeit einer Zeichnung durch zahlreiche Überbestimmungen zu heben".[36]) Ein geübter Zeichner wird vielmehr bei beiden Aufgaben (abgesehen von einigen sogleich zu erwähnenden Spezialfällen) das *Auge* entscheiden lassen, „wie er denn überhaupt von der Tatsache, daß das Auge der beste Zirkel ist, den ausgiebigsten Gebrauch macht"[37]), natürlich nur solange er imstande ist, sich durch beständiges Kontrollieren zu vergewissern, daß er die vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenzen innehält.

Ein für das praktische Zeichnen[38]) wichtiger Spezialfall der Aufg. 23 tritt ein, wenn die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 von vornherein gegeben sind und die Strecken A_1A_2, B_1B_2 innerhalb der *stumpfen* Scheitelwinkel liegen. Es handelt sich dann um die Lösung folgender Aufgabe:

25. Die Endpunkte zweier parallelen und nahe aneinander gelegenen Strecken A_1A_2, B_1B_2 sind gegeben und durch die Geraden l_1, l_2 „über Kreuz" verbunden; der spitze Schnitt von l_1, l_2 ist genauer zu bestimmen.

Man verschiebe die Strecke B_1B_2 (Fig. 51) parallel mit sich selbst nach C_1C_2 und bestimme den Schnittpunkt P der Verbindungs-

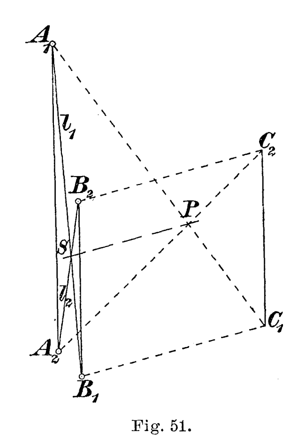


Fig. 51.

linien A_1C_1 und A_2C_2. Zieht man durch P zu B_1C_1 die Parallele, so geht diese durch S. *Beweis:* Durch zweimalige Anwendung des Proportionallehrsatzes erhält man:

$$\begin{array}{c} A_1S : SB_1 = A_1A_2 : B_1B_2 \\ A_1P : PC_1 = A_1A_2 : C_1C_2 \\ \hline A_1S : SB_1 = A_1P : PC_1 , \end{array}$$

d. h. PS ist parallel B_1C_1. Wovon wird (abgesehen von den Daten) die Genauigkeit der Konstruktion abhängen? (Achte auf die Winkel, unter denen sich A_1C_1, A_2C_2 und A_1B_1, PS schneiden.)

2. Schnitt einer Geraden mit einem Kreise.

26. Durch einen gegebenen Punkt P eines Kreises ist eine Gerade g gezogen, die den Kreis unter sehr spitzem Winkel schneidet. Der zweite Schnittpunkt soll genauer bestimmt werden.

a) *mit Benutzung des Mittelpunktes.*[39]) Man fälle (Fig. 52) vom Mittelpunkt M auf die gegebene Gerade g das Lot MQ und verlängere PQ über Q hinaus um sich selbst bis P', so ist P' der gesuchte Punkt.

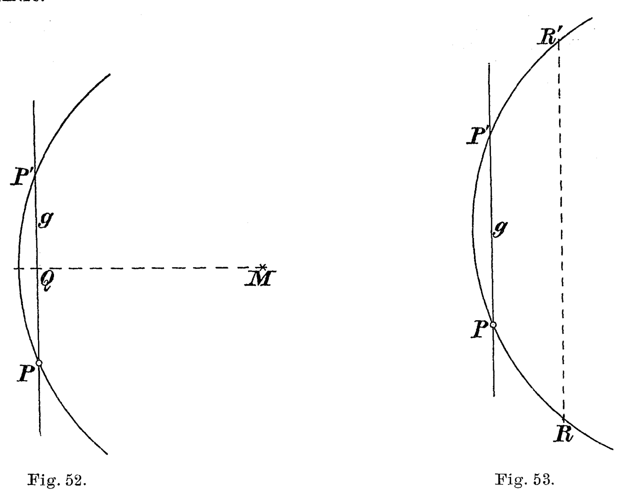


Fig. 52. Fig. 53.

b) *ohne Benutzung des Mittelpunktes.* Man ziehe durch einen beliebigen Punkt R des Kreises (Fig. 53) die Gerade $RR' \parallel g$. Der um R' mit dem Radius PR gezeichnete Kreis trifft g in dem gesuchten Punkt P'. — Wie wird man R wählen, damit der Schnitt in R' möglichst günstig wird?

27. Die Verbindungslinie zweier nahe aneinander liegenden Punkte P, P' eines Kreises genauer zu bestimmen.

Man trage (Fig. 53) von P, P' aus die Sehnen $PR = P'R'$ in den Kreis ein. Durch RR' ist die Richtung der gesuchten Verbindungslinie PP' genauer bestimmt.

„Dasselbe Verfahren ist anwendbar, wenn zu einer sehr kurzen, durch ihre Endpunkte gegebenen Sehne eine Parallele zu ziehen ist.“[40])

In der Literatur finden sich noch einige ähnliche Aufgaben, von denen ich zwei hier ohne Lösung angeben will.

28. „Die Durchschnittspunkte einer Geraden g mit einem Kreise k näher zu bestimmen, wenn beide unter sehr spitzem Winkel zusammentreffen."

29. „Die Schnittpunkte zweier Kreise k_1 und k_2 zu finden, welche unter sehr spitzem Winkel zusammentreffen."[41])

---

3. Andere ungünstige Verhältnisse.

Wenn man einen sehr kleinen Winkel halbieren soll, so kann man (Fig. 54) um seinen Scheitel mit passend gewählten Radien zwei Kreise zeichnen und die Schnittpunkte, die sie auf den Schenkeln des Winkels bestimmen, „über Kreuz" verbinden.[42]) Kann man die Zirkelspitze nicht genau in den Scheitel einsetzen (vgl. etwa Nr. 23), so ist das nach Nr. 4 der oben genannten Wienerschen Sätze nicht von Belang. (Wie kann man die Radien praktischer wählen, als dies in der schematischen Fig. 54 geschehen ist? Vgl. hierzu Nr. 1 und 3 der Wienerschen Sätze.) — Beiläufig sei bemerkt, daß auch die unter Nr. 8d angegebene Konstruktion hier gut anwendbar ist. Worin besteht dabei die Genauigkeitsprobe?

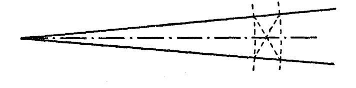


Fig. 54.

Zahlreiche Aufgaben, bei denen unsichere Schnitte auftreten, lassen sich (wie bei dem soeben nebenbei erwähnten Beispiel) einfach dadurch erledigen, daß man den unsicheren Schnittpunkt nicht benutzt, also als unzugänglich betrachtet. Freilich muß man dann in der Auswahl der einzuschlagenden Methode womöglich noch vorsichtiger sein als bei den im Abschnitt I besprochenen Fällen.

Da sich Messungsfehler bei kleinen Strecken stärker bemerkbar machen als bei großen, so werden auch Kreise je ungenauer, desto kleiner ihre Radien sind. Man wird daher Konstruktionen, bei denen etwa an einen sehr kleinen Kreis die Tangenten zu legen wären, möglichst umgehen. Ein typisches Beispiel hierfür, welches auch Witting[43]) bei dieser Gelegenheit bespricht, ist folgendes:

30. An zwei Kreise, deren Radien nahezu gleich sind, die gemeinschaftlichen äußeren Tangenten zu legen.

Man verlängere (Fig. 55) die Zentrale MN über M hinaus, bis sie die Peripherie des größeren Kreises in A schneidet, mache AB

gleich dem Radius des kleineren Kreises, errichte in B auf MN das Lot l und schlage um M mit dem Radius MN einen Kreis, der das

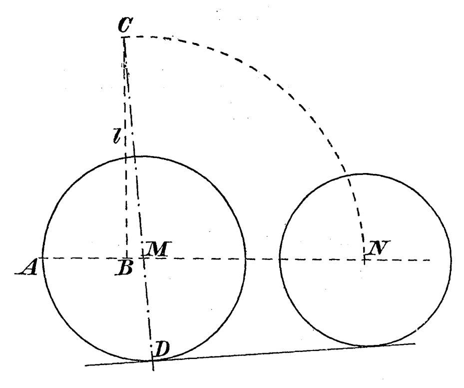


Fig. 55.

Lot l in C treffe. Der Punkt D, in welchem die Verlängerung der Geraden CM den größeren Kreis schneidet, ist einer der gesuchten Berührungspunkte.

Andere Aufgaben zu lösen, bei denen die auftretenden Schnittpunkte nicht sicher genug bestimmt erscheinen, hat für eine rein *planimetrische* Behandlung des Gegenstandes wenig Zweck. Meistens werden bei solchen Aufgaben, soweit sie in der *angewandten Mathematik* vorkommen — ich denke besonders an die Graphostatik —, durch die *Art* der Aufgabe noch andere Bestimmungsstücke gegeben sein, die zur genaueren Ermittelung des unsicheren Schnittpunktes dienen können.

Um die Schüler, die etwa diese Schrift zur Hand nehmen, zu eigener Arbeit anzuregen, schlage ich ihnen die Erledigung folgender Fragen vor: Wie wird man die mittlere Proportionale zu zwei Strecken a, b konstruieren, 1) wenn die Strecken a, b *nahezu gleich* sind, 2) wenn eine der Strecken *sehr klein* ist, 3) wenn die beiden Strecken aus irgend welchen Gründen aneinandergelegt werden *müßten*, aber das Zeichenblatt die Strecke $(a + b)$ *nicht mehr faßt?* Wie wird man bei etwaiger Anwendung des Sekanten-Tangentensatzes die bei Aufg. 30 ausgeführte Konstruktion (mit geringen Abänderungen) benutzen? Ähnliche Fragen zu behandeln, bietet der geometrische Schulunterricht häufig Gelegenheit.

Literaturnachweisungen und Zusätze.

Bei der Zusammenstellung des Literaturverzeichnisses hat mir Herr Lampe in liebenswürdiger Weise seine Unterstützung zu teil werden lassen; durch seine Freundlichkeit ist manches zu meiner Kenntnis gekommen, was mir sonst sicherlich entgangen wäre. Daher möchte ich nicht versäumen, Herrn Lampe auch an dieser Stelle für seine Hilfe meinen herzlichen Dank auszusprechen.

1) S. 7. J. Steiner, Ges. Werke, Bd. 1, Berlin 1881, S. 510.

2) S. 7. Vgl. z. B. J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung (Progr. Realsch. i. Thann) Leipzig 1904, S. VII, Fußnote.

3) S. 7. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1884, S. 190.

4) S. 7. Diese von Wiener empfundene Lücke ist im Jahre 1902 ausgefüllt worden. Vgl. Geuer, Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gaußschen Ausgleichungsverfahren, wonach die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird (Progr. Nr. 678, Progymn. i. Durlach, 1902). — Vgl. auch F. Klein, Anwendung der Diff.- u. Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1901, S. 358 ff. und P. Böhmer, Über geometrische Approximationen, Diss. Göttingen 1904. Der Verf. der zuletzt genannten Arbeit zeigt in lehrreicher Weise an mehreren Beispielen, wie sich die Frage nach der genauesten Konstruktionsmethode reduzieren läßt auf ein Minimumproblem. — Auf einige andere Arbeiten hat mich Herr Haentzschel während des Druckes dieser Zeilen freundlichst aufmerksam gemacht; eine genaue Durchsicht war mir nicht mehr möglich, ich gebe daher nur die Titel wieder: Mehmke, Naturf. Versammlung Karlsbad 1902, Holzmüller, Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. 1905, Nitz, Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Diss. Königsberg 1905. Daselbst S. 6 f. auch Literatur (seit 1846).

5) S. 10, Aufg. 1a. J. H. Lambert, Freye Perspective, oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen. 2. Aufl., Zürich 1774, Bd. 2, S. 172 f. (In der 1. Aufl. (1759) steht die Lösung noch nicht.) Den *Beweis* hat Lambert in sehr einfacher und lehrreicher Weise nur mit Hilfe der Perspektive (*ohne* Benutzung *harmonischer* Beziehungen) geführt. A. a. O. finden sich auch schon viele Aufgaben, die viel später (1833) von Steiner veröffentlicht worden sind. — G. Lamé (Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818, S. 47) gibt eine Andeutung über die Lösung der Aufgabe gelegentlich der Konstruktion der *Polare* eines Punktes in bezug auf einen Kegelschnitt. Das

Geradenpaar l_1, l_2 erscheint dabei als ein *entarteter Kegelschnitt.* — J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benutzung (1833), § 5, Nr. VII oder Ges. Werke, Bd. 1, S. 469.

6) S. 10, Aufg. 1b. J. H. Lambert a. a. O. S. 55. R. Schüssler, Orthogonale Axonometrie, Leipzig 1905, S. 19.

7) S. 11, Aufg. 1d. Ch. Brisse, Cours de géométrie descriptive, Paris 1895, I, S. 23. G. Müller, Zeichnende Geometrie, 3. Aufl. Esslingen 1884, S. 43. R. Schüssler, a. a. O. S. 20. A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Progr. (Nr. 564) Gymn. z. h. Kreuz, Dresden 1899, S. 11; ebenso bei vielen anderen Autoren.

8) S. 11, Aufg. 1e. R. Schüssler a. a. O. S. 20. Bei Ch. Brisse a. a. O. S. 21 eine *allgemeinere* Bemerkung über die Lösung ähnlicher Aufgaben durch eine *Verkleinerung des Maßstabes* (réduction d'échelle); Erläuterung der Methode an der Aufgabe: „Faire passer une droite par deux points donnés chacun par deux droites qui se coupent en déhors de l'épure.“ (Vgl. Aufg. 3.)

9) S. 11, Aufg. 1f. Schüssler bemerkt hierzu sehr treffend: „Diese Konstruktion empfiehlt sich besonders, weil sie die wenigsten Hilfslinien erfordert und alle Schnitte günstig (nahezu rechtwinklig) sind.“ Gleichwohl wird natürlich auch diese Konstruktion, wie jede andere, in gewissen Fällen ungenau. Wann?

10) S. 11, Aufg. 1g. J. Schlotke in einem an den Verfasser gerichteten Briefe vom 21. Okt. 1905.

11) S. 12, Aufg. 1h. Vgl. z. B. Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie A, 24. Aufl. Potsdam 1899, S. 71, Aufg. 71 und „Anleitung zum Lösen“, 2. Aufl. 1900, S. 8f, Nr. 71.

12) S. 12, Aufg. 1i. Maurice d'Ocagne, Journal de Math. élém. de M. Longchamps, 1886, p. 59 (zitiert nach E. Lemoine, Géométrographie ou art des constructions géométriques, Sammlung Scientia, Nr. 18, Paris 1902, S. 30 f.)

13) S. 13. So bei A. Witting a. a. O. S. 11f. — Hier sei mir noch gestattet, eine nur theoretisch interessante Lösung anzugeben, die den Satz benutzt, daß die Chordalen dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden. Man zeichne einen beliebigen Kreis, der die Geraden l_1 und l_2 in A_1, B_1 und A_2, B_2 schneide. Dann lege man je einen Kreis durch A_1, B_1, P und durch A_2, B_2, P. Diese Kreise schneiden sich zum zweiten Male in einem Punkte Q der gesuchten Verbindungslinie PS. (S ist der *Chordalpunkt* der drei Kreise.)

14) S. 13, Aufg. 2. Hubert Müller (Leitfaden der ebenen Geometrie, 1. Teil, 2. Heft, 2. Aufl., Leipzig 1878, Übg. S. 5) formuliert die Aufgabe so: Auf dem Felde sind zwei Punkte A und B durch Visierstäbe bezeichnet. Obgleich man eines Hindernisses wegen nicht längs der Linie AB visieren kann, so soll dennoch mit alleiniger Hilfe von Visierstäben der Schnittpunkt der Geraden AB mit einer anderen ausgesteckten Geraden g bestimmt werden.

15) S. 14, Aufg. 3 (1. Fall). Der bei der linearen Konstruktion des vierten harmonischen Punktes gebrauchte *Satz,* daß jede Diagonale eines vollständigen Vierseits durch die beiden anderen harmonisch geteilt wird, steht schon bei Pappus (Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Frederico Commandino in latinum conversae et commentariis illustratae. Pisanii 1588, Bononiae 1660, t. VII, 131). Die *Aufgabe,* zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen allein mit Hilfe des Lineals zu finden, ist (wie Steiner a. a. O. I 290 angibt) zuerst von De Lahire (Sectiones conicae 1685) gelöst worden.

16) S. 15, Aufg. 3, 2a. R. Schüssler S. 20. Die bei A. Witting S. 12 gegen die Konstruktion ausgesprochenen Bedenken kann ich nicht sämtlich teilen, was vorn in den Fragen zum Ausdruck kommt.

17) S. 15, Aufg. 3, 2b. R. Schüssler a. a. O. S. 20.

18) S. 17, A. Witting S. 12 f. benutzt noch die Desarguessche und Pascalsche Konfiguration, was theoretisch sehr lehrreich ist.

19) S. 19, Aufg. 4. Schüssler löst die Aufgabe mit 1 f. bezw. 6, 1.

Zusatz zu Aufg. 5 (S. 19): Die Aufgaben über Verwandlung von Parallelogrammen und Dreiecken (z. B. ein Parallelogramm in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln) lassen sich, wenn eine Ecke unzugänglich werden sollte, meist mit noch einfacheren Hilfsmitteln lösen, worauf hier aber nicht eingegangen werden soll.

20) S. 20, Aufg. 6, 2. Vgl. Spieker, a. a. O. Anhang II, 11 und Aufl. dazu.

21) S. 21, Aufg. 8a. G. Müller, a. a. O. S. 23, dort ist aber nur ein Paar Parallelen (etwa u_1, v_1) benutzt und die Halbierungslinie des von diesen eingeschlossenen Winkels auf die gewöhnliche Art konstruiert. Durch das hier benutzte zweite Parallelenpaar wird der von Witting (S. 10) bemängelte „stumpfe" Schnitt vermieden. Eine Lösung der Aufgabe mit alleiniger Benutzung des „Parallellineals" gibt G. Wallenberg (Sitz. Ber. d. Berliner Math. Ges. IV, 1905, S. 22), andere Lösungen unter Benutzung bestimmter Zeicheninstrumente findet man in den von A. Adler (Sitz. Ber. d. Berliner Math. Ges. I, 1902, S. 26—28) angeführten Arbeiten.

22) S. 21, Aufg. 8c. G. Müller, S. 23.

23) S. 22, Aufg. 8d und e. Witting, S. 10 f. Der letzte Teil von 8e ist hier wörtlich zitiert.

24) S. 23, Aufg. 10. Ein praktischer Fall (mit Anwendung von Aufg. 3) wäre etwa folgender: Auf einer Landkarte sind drei Orte A, B, C nicht mehr enthalten, aber durch je zwei geradlinige Chausseen bestimmt. Der von den drei Orten gleichweit entfernte Punkt M und die Entfernung (MA) ist zeichnerisch zu ermitteln.

25) S. 25, Aufg. 11c. Spieker a. a. O. Anhang II, 11 und Aufl. dazu. (Siehe Note 20.)

26) S. 27, Aufg. 15. Diese sehr bekannte Konstruktion der Chordale ist in vielen geometrischen Schulbüchern behandelt.

27) S. 28, Aufg. 16. Diese Lösung findet sich bei J. Schlotke, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 4, Dresden 1896 (Vorwort), die Aufgabe allein (ohne Lösung) in mehreren Büchern, z. B. bei Alexandroff, Aufgaben aus der niederen Geometrie (deutsche Ausgabe von M. Schuster), Leipzig 1903, Abschn. IV, Aufg. 3.

28) S. 28, Aufg. 17. Mathematical questions and solutions from the Educational Times. Ed. by Constance J. Marks (2), Bd. 5, London 1904, S. 83, Nr. 15401, gestellt von L. Catalá, gelöst von J. Wiggins.

29) S. 29, Aufg. 18. Bei A. Witting a. a. O. S. 14 ist die Aufgabe durch Verschiebung des Dreiecks ABC — und zwar mit Hilfe von *Pauspapier* — gelöst.

30) S. 30, Aufg. 20a. Vgl. z. B. Spieker a. a. O. § 271. Dort ist zwar S zugänglich, aber die Konstruktion ist dieselbe wie hier. — Einem hübschen Spezialfall der Aufg. 20, auf den mich mein Kollege Lauenstein aufmerksam gemacht hat, begegnet man bei der Behandlung des Apollonischen Taktionsproblems. Eine der 10 speziellen, hierzu gehörigen Aufgaben ist die, *Kreise*

zu finden, die durch zwei gegebene Punkte P_1, P_2 gehen und einen gegebenen Kreis K berühren. Diese Aufgabe löst man bekanntlich, indem man durch P_1, P_2 einen Kreis legt, der K in A, B schneidet. Von dem Punkte S aus, in welchem sich $P_1 P_2$ und AB schneiden, legt man die Tangenten an den Kreis K und erhält dadurch die Berührungspunkte der beiden gesuchten Kreise. — Liegen *die Punkte P_1, P_2 nahezu auf einem mit K konzentrischen Kreise,* so ist die angegebene Lösung unbrauchbar. Man lege in diesem Falle durch P_1, P_2 noch einen Kreis, der K in C, D schneidet; die Sekante CD geht durch S, man braucht also, um die Polare von S in bezug auf K (und damit die gesuchten Berührungspunkte) zu ermitteln, nur nach Fig. 42 zu verfahren. Die *Genauigkeitsprobe* ist sehr bequem. — Für Schüler dürfte es lehrreich sein, hierbei den ganzen *Kreisbüschel* mit den Grundpunkten P_1, P_2 zu betrachten und dabei zu bemerken, wie sich die durch K und einen beliebigen Kreis des Büschels bestimmte Chordale um S dreht, wenn der beliebige Kreis den Büschel durchläuft.

31) S. 32, Aufg. 21. P. Zühlke, Sitz. Ber. d. Berliner Math. Gesellschaft. V, 1906, S. 15 f.

32) S. 33, Aufg. 22. Der Anfang ist nach Witting (a. a. O. S. 17) zitiert. Dort ist aber die Aufgabe anders gelöst. Die Kreisbogen $(P_1 P_2 P_3)$, $(Q_1 Q_2 Q_3)$ werden nämlich dort *punktweise* konstruiert und ihr Schnitt dann mit R verbunden. — Abgesehen davon, daß der erwähnte Schnitt nur angenähert bestimmt wird, ist leicht zu erkennen, daß sich dabei die gesuchte Chordale als Verbindungslinie zweier nahegelegener Punkte, also (wie auch Witting selbst bemerkt) nicht sonderlich genau ergibt. Führt man zum Vergleiche einmal die vorn angegebene Konstruktion an der von Witting gezeichneten Figur (a. a. O. S. 17, Fig. 33) aus, indem man durch die dort mit L, K', K'' bezeichneten Punkte den Kreis legt, so wird man finden, daß dann die Punkte F, R um etwa 22 mm voneinander entfernt sind, während die durch die Wittingsche Konstruktion sich ergebende Strecke (dort JH) nur 12 mm lang ist. — Übrigens ist die a. a. O. gemachte Bemerkung, daß die Konstruktion besonders ungenau werde, wenn „die Winkel $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ beide sehr klein sind, weil dann, wie man leicht sieht, der Punkt H sehr nahe an J heranrückt," in dieser Fassung unzutreffend.

33) S. 35. Vgl. z. B. Alexandroff a. a. O. Abschn. IV, Aufg. 139: „Man soll einen Winkel, dessen Scheitel unzugänglich ist, in n Teile von gegebener Größe teilen. (Methode der Verschiebung.)" — Bei Witting a. a. O. sind noch 10 Aufgaben behandelt, die hier nicht aufgenommen worden sind, teils aus den am Schlusse der Einleitung (S. 8) ausgesprochenen Gründen, teils weil zur Lösung einiger dieser Aufgaben bei W. Hilfsmittel benutzt werden, die hier grundsätzlich ausgeschlossen wurden, wie etwa der Gebrauch von Pauspapier oder das in der vorigen Note angedeutete Verfahren zur Konstruktion von Kreisbogen. Ich will nicht sagen, daß beim Gebrauch von Pauspapier sich größere Ungenauigkeiten ergeben als beim Konstruieren mit den schon von den alten Griechen benutzten Zeichenmaterialien, ich will auch daran erinnern, daß u. a. G. Hauck (Sitz. Ber. d. Berliner Math. Ges. III, 1904, S. 5) für das „Probieren" (Konstruktion durch successive Annäherung) eine Lanze bricht, indem er es vergleicht mit dem „Verfahren, das die Analysis einschlägt, wenn sie durch eine konvergente Zahlenreihe deren Grenzwert bestimmt." So lange es sich um die praktische Anwendung handelt, werde ich keins dieser Verfahren gering achten, welche dazu führen, einen gesuchten Punkt mit einer für die Praxis hinreichen-

den Schärfe zu konstruieren; ich gebe zu, daß man viele Hilfsmittel benutzen *kann*, doch ist man damit noch nicht der Entscheidung überhoben, welche von diesen man benutzen *will*, und die Festsetzungen über die Wahl der Hilfsmittel sind nicht nur von Bedeutung für die praktische Lösung der gerade vorgelegten, speziellen Aufgabe, sondern auch für die theoretische Einsicht in den Wirkungsbereich der Zeicheninstrumente, wie die Arbeiten der Herren Hilbert, Adler, Feldblum, Wallenberg u. a. zur Genüge dargetan haben. Dem *praktischen Zeichner* wird es in der Regel ganz gleichgültig sein, wie er etwa einen Winkel, dessen Scheitel unzugänglich ist, halbiert, wenn er sich nur durch eine Probe überzeugen kann, daß seine Konstruktion hinlänglich genau geraten ist. Für die *Theorie der Zeicheninstrumente* aber ist es von Wichtigkeit, ob man die genannte Aufgabe etwa mit alleiniger Benutzung des „Parallellineals" lösen kann, oder ob man den Streckenübertrager oder sonst noch ein Instrument dazu nötig hat, damit die Konstruktion nicht bloß praktisch brauchbar, sondern auch *theoretisch genau* sei. Deswegen scheint es mir z. B. nicht gleichgültig, ob man die oben unter Nr. 22 behandelte Aufgabe mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösen kann, oder ob man (vgl. Note 32) die betr. Kreisbogen punktweise konstruieren muß, so daß der Schnitt der Bogen nur angenähert bestimmt ist.

34) S. 35. Eine Ausnahme macht Witting, der die Konstruktion ausdrücklich verwirft.

35) S. 36, Aufg. 24. Natürlich kann man noch viele theoretisch richtige, auch einfache Lösungen der Aufgabe finden, z. B. folgende: Man zeichne um P, Q zwei gleiche Kreise mit nicht zu großem Radius (etwa doppelt oder dreimal so lang wie die Strecke PQ); um die Schnittpunkte U, V dieser beiden Kreise zeichne man mit gleichen Radien (wieder etwa doppelt oder dreimal so lang wie UV) zwei neue Kreise; diese schneiden sich auf der Geraden PQ, wie leicht zu beweisen ist. — Führt man jedoch diese an sich richtige Konstruktion bei zwei *nahe* gelegenen Punkten P, Q *wirklich* aus, so findet man große Ungenauigkeiten. Diese haben ihren Grund nicht etwa in einem ungünstigen Schnitt der Kreisbogen, denn die Kreise schneiden sich, wenn man die Radien in der angegebenen Weise wählt, unter Winkeln von etwa 29^0 bezw. 20^0, was immerhin noch als günstig gelten muß. Vielmehr liegt (ganz abgesehen von der „Dicke" der Kreisbogen) die größte Ungenauigkeit darin, daß man die Zirkelspitze nicht *genau* in P und Q einsetzen kann, weil P und Q nicht als „Punkte", sondern als „Punktkreise" gegeben sind.

36) S. 36. Geuer a. a. O. (vgl. Note 4) S. 27.

37) S. 36. G. Hauck a. a. O. (vgl. Note 33) S. 5.

38) S. 37. Witting (a. a. O. S. 6) weist darauf hin, daß die Aufg. 25 bei der Schattenkonstruktion in der Perspektive häufig anzuwenden ist. — Ein anderer, für die darstellende Geometrie wichtiger Spezialfall der Aufg. 23 ist folgender: „Zwei Geraden sind durch die Projektionen je eines Punktepaares gegeben, der Winkel aber, den die gleichnamigen Projektionen der Geraden bilden, ist sehr spitz. Die Projektionen des Schnittpunktes sind genauer zu ermitteln." Solche und ähnliche Aufgaben sind hier aus den im Vorwort genannten Gründen nicht aufgenommen. Für Leser, die sich dafür interessieren, will ich einige hierauf bezügliche Stellen der Literatur anführen: Chr. Wiener, a. a. O. Bd. 1, S. 77; Rohn-Papperitz, Darstellende Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1893, S. 49; J. Schröder, desgl. Bd. 1, Leipzig 1901, S. 73, 113; J. Schlotke, desgl. an mehreren Stellen.

39) S. 38, Aufg. 26a. J. Schlotke, a. a. O. (Vorw. zu Bd. IV.)

40) und 41) S. 38 und 39, Aufg. 27—29. J. Schlotke, a. a. O.

42) G. Müller, a. a. O. S. 17. Die Konstruktion ist wohl sicherlich älter, doch habe ich nicht feststellen können, von wem sie herrührt. Daß sie nicht nur bei kleinen Winkeln brauchbar ist, versteht sich von selbst.

43) A. Witting, a. a. S. 7.

In der vorstehenden Übersicht habe ich *versucht*, für die oben behandelten Aufgaben, soweit sie sich in der Literatur finden, die *erste* Quelle anzugeben. Daß mir dies überall *gelungen* ist, darf ich angesichts der Tatsache, daß die Publikationen meist recht zerstreut sind, kaum hoffen. Für jede hierauf bezügliche, berichtigende oder ergänzende Mitteilung wäre ich den Herren Fachkollegen sehr dankbar. — Sollte der eine oder andere der jugendlichen Leser durch die Literaturangaben angeregt werden, in den alten und meist wohl nicht genügend geschätzten Büchern (wie De Lahire, Lambert u. a.) mathematische Genüsse zu suchen, so wäre die Mühe, welche die Zusammenstellung der Literatur bereitet hat, reichlich belohnt.